ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΧΑΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Πτυχιακή εργασία

με θέμα

Δημιουργία ολοκληρωμένου περιβάλλοντος εξομοίωσης κεραιών και στοιχειοκεραιών

από την **Δήμητρα Δημητρίου** και την **Μελπομένη Μαυράκη**.

Εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Επίκουρου Καθηγητή Δρ. ***Ιωάννη Βαρδιάμπαση***

στα πλαίσια του "ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ – Αρχιμήδης: Ενίσχυση Ερευνητικών Ομάδων στα ΤΕΙ –
Μελέτη-Σχεδίαση ευφυών κεραιών με τεχνικές υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού και πιλοτική ανάπτυξη-λειτουργία ψηφιακού ραδιοφωνικού σταθμού DAB στα Χανιά (SMART-DAB)"

Χανιά, Μάρτιος 2005

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η υποβαλλόμενη πτυχιακή μας εργασία έρχεται σαν το επιστέγασμα των μόχθων και των προσπαθειών, που κατεβάλαμε όλα αυτά τα χρόνια. Φθάνοντας έτσι και τυπικά στο τέλος της φοιτητικής μας ζωής, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε εκείνους που στάθηκαν πλάι μας σε κάθε μας ανάγκη καθ'όλη τη διάρκεια της πορείας μας από τα πρώτα βήματα μέχρι και σήμερα.

Θερμές, λοιπόν, ευχαριστίες αναγκαιούν πρωτίστως προς τον καθηγητή μας κύριο Ιωάννη Βαρδιάμπαση που συμμερίστηκε την αγωνία μας για την ολοκλήρωση της πτυχιακής μας εργασίας και ατελέσφορα προσέφερε τη βοήθειά του κάθε φορά που την είχαμε ανάγκη.

Στους γονείς μας για τα εφόδια, τα ψυχικά και τα υλικά ,όπως και την υποστήριξη κάθε μορφής που μας παρείχαν και εξακολουθούν να μας παρέχουν.

Στους συγγενείς, τους φίλους, όπως πλέον και τους συζύγους μας για την υπομονή και την στωικότητα που επέδειξαν, ειδικά κατά την τελευταία κρίσιμη φάση της ολοκλήρωσης της πτυχιακής μας.

Τέλος, θα ήταν σίγουρα άδικο εάν λησμονούσαμε όλο το υπόλοιπο εκπαιδευτικό προσωπικό της Σχολής για την αρωγή τους και την ουσιαστική συνεισφορά τους για το ακαδημαϊκό μας οικοδόμημα.

Σας ευχαριστούμε.

.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Μικροκυματικών Επικοινωνιών και Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών **του Τμήματος Ηλεκτρονικής Τ.Ε.Ι. Κρήτης, στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος "**Αρχιμήδης**: Ενίσχυση Ερευνητικών Ομάδων στα ΤΕΙ –** Μελέτη-σχεδίαση ευφυών κεραιών με τεχνικές υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού και πιλοτική ανάπτυξη-λειτουργία ψηφιακού ραδιοφωνικού σταθμού DAB στα Χανιά (SMART-DAB)**" που συγχρηματοδείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση και το Υπουργείο Εθνικής Παιδείας & Θρησκευμάτων μέσω του ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ.**

Μαυράκη Μελπομένη και Δημητρίου Δήμητρα

Χανιά, Μάρτιος 2005

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο στόχος της συγκεκριμένης εργασίας είναι τριπλός:

(ι) Να βοηθήσει τον χρήστη να κατανοήσει την φυσιολογία των κεραιών

(ιι) Να εξοικειώσει το χρήστη με τα λογισμικά προγράμματα σχεδιασμού κεραιών.

(ιιι) Να παρουσιάσει στο χρήστη ποικιλία χαρακτηριστικών διαφόρων κεραιών και διάφορες εξελίξεις που έχουν συμβεί στον κλάδο αυτό τον τελευταίο καιρό, κυρίως αυτές που σχετίζονται με ασύρματα τηλεπικοινωνιακά συστήματα.

Το περιβάλλον εξομοίωσης το οποίο επιχειρούμε να δημιουργήσουμε με αυτή την εργασία, παρά τα σημαντικά πλεονεκτήματα που διαθέτει, σε καμία περίπτωση δεν αντιπροσωπεύει την πρώτη προσπάθεια διδασκαλίας βασισμένη σε πολυμέσα και δίκτυο.

Οι παρουσιάσεις με τη βοήθεια των πολυμέσων εμπλουτίζουν αποτελεσματικά την διδασκαλία των διαφόρων μαθημάτων και είναι ευεργετικές στη διδασκαλία του ηλεκτρομαγνητισμού και των κεραιών. Βέβαια, στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτείται η εγκατάσταση πακέτων προγραμμάτων για κάθε χρήστη. Αυτή η χρήση των Η/Υ όχι μόνο επιτρέπει την οπτικοποίηση διαφόρων φυσικών φαινομένων, αλλά επίσης προκαλεί την εξοικείωση των σπουδαστών με την τεχνολογία, που η εξέλιξή της αποτελεί σημαντικό παράγοντα ανάπτυξης πολλών βιομηχανιών.

Η εκρηκτική ανάπτυξη και η ταχεία εξέλιξη στην αγορά των ασύρματων τηλεπικοινωνιακών συστημάτων τα τελευταία χρόνια, έχουν σαν αποτέλεσμα την αύξηση στη ζήτηση μηχανικών με εξειδίκευση και γνώσεις στον τομέα των κεραιών, όπου τα δεδομένα συνεχώς αλλάζουν και υπάρχει συνεχής εξέλιξη.

Οι σπουδαστές – οι μελλοντικοί επιστήμονες που θα αναλάβουν να αναπτύξουν ακόμα περισσότερο τον τομέα αυτό – πρέπει να διδάσκονται και να εκπαιδεύονται έχοντας τους παραπάνω όρους και δεδομένα υπ'όψιν.

Έχει αποδειχθεί ότι η χρήση των Η/Υ για εκπαιδευτικούς σκοπούς στον τομέα του ηλεκτρομαγνητισμού βοηθάει τους σπουδαστές να κατανοήσουν σε βάθος τη φυσιολογία και τα χαρακτηριστικά των κεραιών και αυξάνει την πρακτική εφαρμογή του θέματος στη βιομηχανία.

Η χρήση των Η/Υ για εξομοίωση κεραιών με σκοπό την κατανόηση και εκμάθηση της λειτουργίας και των χαρακτηριστικών των κεραιών, είναι ένα κράμα παραδοσιακής διδασκαλίας και χρήσης συγκεκριμένων προγραμμάτων εξομοίωσης ηλεκτρομαγνητισμού.Αυτή η εξομοίωση μπορεί εύκολα να πραγματοποιηθεί με τη χρήση ενός ιδιαίτερα ευέλικτου λογισμικού, του Mathematica.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Μικροκυματικών Επικοινωνιών και Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών **του Τμήματος Ηλεκτρονικής Τ.Ε.Ι. Κρήτης, στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος "**Αρχιμήδης**: Ενίσχυση Ερευνητικών Ομάδων στα ΤΕΙ –** Μελέτη-σχεδίαση ευφυών κεραιών με τεχνικές υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού και πιλοτική ανάπτυξη-λειτουργία ψηφιακού ραδιοφωνικού σταθμού DAB στα Χανιά (SMART-DAB)**" που συγχρηματοδείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση και το Υπουργείο Εθνικής Παιδείας & Θρησκευμάτων μέσω του ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ.**

ABSTRACT

The goals of the course are threefold:

(i) To provide students with an analytical and intuitive understanding of antenna physics,

(ii) To expose students to antenna computer aided design (CAD) software, and

(iii) To introduce students to a variety of antenna structures of practical interest and to recent developments in the field, especially those related to wireless and personal communication systems.

The AWS and WebMath simulation environment described in this paper offer unique features but by no means represent the first attempt at multimedia and network-based instruction. Multimedia demonstrations have been shown to effectively enhance learning in a variety of disciplines and are especially beneficial when teaching electromagnetic and antenna principles.

Often, multimedia-enhanced teaching has been implemented through courseware approaches which entail the development of a core set of tools that are delivered as a software package for each user to install on a specific platform.

The introduction of computers into the classroom not only permits the visualization of physical phenomena, but also exposes students to modern computational techniques that are vital in many industrial analysis an design environments.

The explosive growth and rapid evolution of the wireless and personal telecommunications markets have resulted in a significant demand of antenna engineers with a solid understanding of fundamental antenna concepts, and a working knowledge of modern antenna systems. Students need to be educated with these provisos in mind.

It has been shown that use of instructional Web technologies in electromagnetics courses enhances students understanding of antenna physics and increases the industrial relevance of the course.

Modern CAD tools permit the rapid analysis of composite antenna systems and the visualization of their radiation patterns. In an educational context, these CAD tools assist students in developing an in-depth intuition into complex mathematical and physical concepts. AWS simulations are supported through a *Mathematica*® getaway, named WebMath. The WebMath environment permits advanced simulations and is easily reconfigurable.

This work was done at the **Microwave Communications and Electromagnetic Applications Lab** of T.E.I. of Crete and supported by the Greek Ministry of National Education and Religious Affairs and the European Union under the ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ – Archimedes – **Support of Research Groups in T.E.I. of Crete project "Smart antenna study & design using techniques of computational electromagnetics and pilot development & operation of a digital audio broadcasting station at Chania of Crete (SMART-DAB)**".

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

Κεφάλαιο 1 Πεδία Ακτινοβολίας …… 4
1.1 Εντάσεις και φορτία ως πηγές δημιουργίας πεδίων …….. 4
1.2 Καθυστερημένα Δυναμικά …… 6
1.3 Αρμονική Χρονική Εξάρτηση …… 9
1.4 Πεδία Γραμμικής Κεραίας Καλώδιο ……. 11
1.5 Πεδία ηλεκτρικών και μαγνητικών Δίπολων ……... 14
1.6 Θεώρημα Εξασθένισης Ewald – Oseen …….. 19
1.7 Πεδία Ακτινοβολίας ……. 25
1.8 Ακτινικές Συντεταγμένες ……. 28
1.9 Προσέγγιση ακτινοβολούντος πεδίου …….. 31
1.10 Υπολογίζοντας τα Ακτινοβολούντα Πεδία ……... 31

Κεφάλαιο 2 Κεραίες Εκπομπής και Λήψης …… 35
2.1 Διακυμάνσεις της Ενέργειας και Ένταση Ακτινοβολίας …… 35
2.2 Κατευθυντικότητα, Κέρδος και Πλάτος Κύματος …… 36
2.3 Ενεργός Περιοχή ……. 42
2.4 Ισοδύναμα Κυκλώματα κεραιών ……... 47
2.5 Ενεργό Μήκος ……. 49
2.6 Επικοινωνούντες κεραίες ……... 51
2.7 Θερμοκρασία θορύβου κεραίας …… 53
2.8 Σύστημα Θερμοκρασίας Θορύβου ……... 58
2.9 Περιορισμοί ρυθμού δεδομένων …….. 65
2.10 Δορυφορικές ζεύξεις ……... 67
2.11 Εξίσωση RADAR …… 71

Κεφάλαιο 3 Γραμμικές κεραίες και κεραίες βρόγχου**……...** 74
3.1 Γραμμικές κεραίες ……... 74
3.2 Δίπολο Hertz …… 77
3.3 Κεραίες στάσιμων κυμάτων …….. 79
3.4 Δίπολο μισού μήκους κύματος ……. 81
3.5 Μονοπολικές κεραίες …….. 83
3.6 Κεραίες οδεύοντος κύματος …….. 84
3.7 Κεραίες σε σχήμα βε (V) και ρομβικές κεραίες …….. 87
3.8 Κεραίες βρόγχου ……. 92
3.9 Κυκλικοί βρόγχοι ……. 94
3.10 Τετραγωνικοί βρόγχοι …… 95
3.11 Ακτινοβολία δίπολου και τετράπολου …….. 96

Κεφάλαιο 4 Οι ρευματικές κατανομές στις γραμμικές κεραίες …….. 100
4.1 Ολοκληρώματα Hallen και Pocklington ……... 100
4.2 Διάκενο δέλτα και πηγές επίπεδων κυμάτων ……. 103
4.3 Λύνοντας την εξίσωση του Hallen …… 104
4.4 Ημιτονοειδής Προσέγγιση της έντασης ……... 107
4.5 Ανακλαστικές και κεντροτροφοδοτούμενες κεραίες δέκτες …….. 108
4.6 Προσέγγιση τριών όρων του King …… 111
4.7 Αριθμητική λύση της εξίσωσης του Hallen …….. 115
4.8 Αριθμητική λύση χρησιμοποιώντας παλμικές συναρτήσεις ……. 120
4.9 Αριθμητική λύση για αυθαίρετο επικείμενο πεδίο …….. 124
4.10 Αριθμητική Λύση για την Εξίσωση του Pocklington …….. 126

Κεφάλαιο 5 Εισαγωγή στο Mathematica..... 133
5.0 Γενικά για το Mathematica 133
5.1 Πώς να τρέξετε το Mathematica 134
5.2 Αριθμητικοί υπολογισμοί 134
5.2.1 Μαθηματικά σύμβολα στο Mathematica 136
5.3 Αλγεβρικοί υπολογισμοί 137
5.4 Συμβολικά Μαθηματικά 138
5.4.1 Παραγώγιση 139
5.4.2 Ολοκλήρωση 139
5.4.3 Άθροισμα 140
5.4.4 Εξισώσεις 141
5.4.5 Επίλυση εξισώσεων 142
5.4.6 Διαφορικές εξισώσεις 144
5.4.7 Όρια 145
5.5 Αριθμητικά Μαθηματικά 146
5.6 Συναρτήσεις και προγράμματα 148
5.6.1 Καθορισμός συναρτήσεων 149
5.6.2 Επαναλαμβανόμενες λειτουργίες 150
5.7 Γραφικά και ήχος 151
5.7.1 Βασικά γραφήματα 151
5.7.2 Ανασχεδιασμός και σύνθεση γραφημάτων 159
5.7.3 Γραφήματα περιγραμμάτων και πυκνότητας 162
5.7.4 Τρισδιάστατα γραφήματα επιφανειών 164
5.7.5 Απεικόνιση λίστας δεδομένων 172
5.7.6 Παραμετρικά γραφήματα 175

Κεφάλαιο 6 Επίλυση προβλημάτων ακτινοβολίας γραμμικών κεραιών με χρήση του Mathematica 180
6.0 Διαγράμματα ακτινοβολίας απλών κεραιών 180
6.0.1 Δίπολο μήκους λ/2 .....
6.0.2 Δίπολο μήκους λ .....
6.0.3 Δίπολο μήκους 3λ/2 .....
6.0.4 Δίπολο μήκους 5λ/2 .....
6.0.5 Δίπολο μήκους 7λ .....
6.0.6 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους λ/2 .....
6.0.7 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους λ .....
6.0.8 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους 3λ/2 .....
6.0.9 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους 7λ/2 .....
6.0.10 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους 9λ/2 .....
6.1 Δυσδιάστατα Διαγράμματα 188
6.1.1 PatPlotxy .....
6.1.2 PatPlotxz .....
6.1.3 PatPlotyz .....
6.1.4 PatPlot2Dall .....
6.1.5 Επιλογή «PlotPoints» .....
6.2 Τρισδιάστατα Διαγράμματα 192
6.2.1 PatPlot 3D .....
6.3 Διαγράμματα Ακτινοβολίας Δίπολου Hertz 197
6.3.1 Δίπολο Hertz στη διεύθυνση z σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xyz .....
6.3.2 Ένα δίπολο Hertz σε οποιαδήποτε διεύθυνση σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα

συντεταγμένων xyz …….
6.4.1 Δίπολο αυθαίρετου μήκους στην διεύθυνση z σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xyz ……. 199
6.4.2 Δίπολα αυθαίρετου μήκους σε οποιαδήποτε διεύθυνση σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύτημα συντεταγμένων xyz …… 200
6.5 PatLin.m: Διάγραμμα ακτινοβολίας γραμμικής πηγής ακαθόριστου μήκους…… 202
6.5.1 Γραμμική πηγή αυθαίρετου μήκους στη διεύθυνση z σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xyz …….
6.5.2 Γραμμική πηγή αυθαίρετου μήκους σε οποιαδήποτε διεύθυνση σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημνα συντεταγμένων zyx ……..
6.6 PatArr.m: Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία …… 205
6.6.1 Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία στην διεύθυνση z σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων …….

Παραρτήματα Α - ΣΤ……... 206

Βιβλιογραφία……... 211

Κεφάλαιο 1

Πεδία Ακτινοβολίας

1.1 Εντάσεις και φορτία ως πηγές δημιουργίας πεδίων.

Εδώ θα συζητήσουμε τον τρόπο με τον οποίο συγκεκριμένες διανομές εντάσεων και φορτίων μπορούν να παράγουν και να ακτινοβολήσουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Τυπικά, η διανομή εντάσεων εντοπίζεται σε συγκεκριμένο χώρο (όπως π.χ. σε μια κεραία καλώδιο). Η ένταση ως πηγή μπορεί να παράγει ηλεκτρομαγνητικά πεδία, τα οποία διαχέονται σε μακρινές αποστάσεις από τη θέση της πηγής.

Αποδεικνύεται ευκολότερο να εργαστούμε με τα ηλεκτρικά και μαγνητικά δυναμικά, παρά με τα πεδία E, H. Βασικά, από δύο από τις εξισώσεις Maxwell μπορούμε να εισάγουμε αυτά τα δυναμικά. Έπειτα, οι άλλες δύο, τροποποιημένες για αυτά τα δυναμικά ειδικά, παίρνουν τη μορφή απλής κυματικής εξίσωσης. Οι δύο εξισώσεις Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} \tag{1.1.1}$$

Εισάγουν την ύπαρξη των μαγνητικών και ηλεκτρικών δυναμικών A(r, t) και Φ(r, t), έτσι ώστε τα πεδία E και B να υπολογίζονται από :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} \\ \mathrm{B} &= \nabla \times \mathrm{A} \end{aligned}} \tag{1.1.2}$$

Πράγματι, η σύγκλιση του B εισάγει την ύπαρξη του A έτσι ώστε $\mathrm{B} = \nabla \times \mathrm{A}$. Τότε, ο νόμος του Faraday μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\mathrm{E} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Έτσι, η ποσότητα $\mathrm{E} + \partial \mathrm{A}/\partial t$ μπορεί να αναπαραστεί ως το ανάδελτα ενός κλιμακωτού δυναμικού το οποίο μπορεί να γραφεί, $\mathrm{E} + \partial \mathrm{A}/\partial t = -\nabla\varphi$.

Τα δυναμικά A και Φ δεν ορίζονται αυστηρά. Για παράδειγμα μπορούν να μεταβληθούν προσθέτοντας μεταβλητές σε αυτά. Οι εξισώσεις Maxwell παρέχουν ακόμη μεγαλύτερη ελευθερία, που είναι γνωστή ως συνέχεια κατά πλάτος.

Πράγματι, για κάθε κλιμακωτή συνάρτηση (τύπος), ο ακόλουθος μετασχηματισμός κατά πλάτος,

αφήνει τα E και B σταθερά,

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi' &= \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \\ \mathrm{A}' &= \mathrm{A} + \nabla f \end{aligned}} \tag{1.1.3}$$

Για παράδειγμα, έχουμε το ηλεκτρικό πεδίο,

$$\mathrm{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{A} + \nabla f\right) = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} = \mathrm{E}$$

Η ελευθερία στο να επιλέγεις τα δυναμικά, μας επιτρέπει να επιβάλουμε κάποιους βολικούς περιορισμούς μεταξύ τους. Στη συζήτηση για τα προβλήματα ακτινοβολίας είναι συνηθισμένο να επιβάλλουμε τη συνθήκη Lorenz,

$$\boxed{\nabla \cdot \mathrm{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0} \qquad (1.1.4)$$

Επίσης, αναφερόμαστε σε αυτή ως πλάτος Lorenz ή πλάτος ακτινοβολίας. Κατά τον μετασχηματισμό κατά πλάτος (1.1.3), έχουμε:

$$\nabla \cdot \mathrm{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \left(\nabla \cdot \mathrm{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f\right)$$

Έτσι, αν τα A, Φ δεν ικανοποιούν τον περιορισμό (1.1.4), τα μετασχηματισμένα δυναμικά A', Φ' μπορούν να τροποποιηθούν ώστε να τον ικανοποιούν, επιλέγοντας κατάλληλη συνάρτηση f τη λύση μιας ανομοιογενούς κυματικής εξίσωσης,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \nabla^2 f = \nabla \cdot \mathrm{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.1.2), (1.1.4), στις δύο άλλες εξισώσεις Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathrm{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho, \quad \nabla \times \mathrm{B} = \mu J + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} \qquad (1.1.5)$$

Βρίσκουμε,

$$\nabla \cdot \mathrm{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathrm{A}\right) = -\nabla^2\varphi \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi$$

Και όμοια,

$$\nabla \times \mathrm{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = \nabla \times \left(\nabla \times \mathrm{A}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \mathrm{A}\right) + \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial t^2}$$

$$= \nabla \times \left(\nabla \times \mathrm{A}\right) - \nabla\left(\nabla \cdot \mathrm{A}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathrm{A}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\nabla \times \left(\nabla \times \mathrm{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \mathrm{A}\right) - \nabla^2 \mathrm{A}$. Έτσι, οι εξισώσεις του Maxwell 1.1.5 δίνουν την ισοδύναμη κυματική εξίσωση για τα δυναμικά,

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\nabla^{\varphi}&=\frac{1}{\varepsilon}\rho\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathrm{A}&=\mu J\end{aligned}} \qquad (1.1.7)$$

Συνοψίζοντας τις πυκνότητες ρ και ζ, μπορούν να θεωρηθούν ως και αιτίες παραγωγής των δυναμικών Φ, Α, από τις οποίες τα πεδία Ε, Β, μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις (1.1.2). Η συνθήκη Lorenz είναι συμβατή με τις εξισώσεις (1.1.7) και εισάγει τη διατήρηση του φορτίου.

Πράγματι, έχουμε από (1.1.7),

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\left(\nabla\cdot\mathrm{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\mu\nabla\cdot J+\frac{1}{\varepsilon c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}=\mu\left(\nabla\cdot J+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε $\mu\varepsilon=1/c^2$. Έτσι, η συνθήκη Lorenz εισάγει τον νόμο διατήρησης φορτίου,

$$\nabla\cdot J+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (1.1.8)$$

1.2 Καθυστερημένα Δυναμικά.

Αυτό που θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε εδώ είναι το γεγονός ότι εάν οι πυκνότητες ρ, ζ είναι γνωστές, συνήθως οι λύσεις των κυματικών εξισώσεων (1.1.7) δίνονται από,

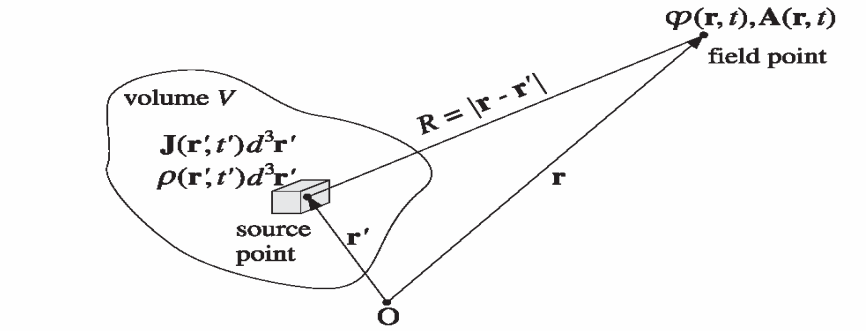
$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\mathrm{r},t)&=\int_v\frac{\rho\left(\mathrm{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi\varepsilon R}d^3\mathrm{r}'\\ \mathrm{A}(\mathrm{r},t)&=\int_v\frac{\mu J\left(\mathrm{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}d^3\mathrm{r}'\end{aligned}} \qquad (1.2.1)$$

Όπου, $R=|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|$ είναι η απόσταση του σημείου r του πεδίου, από το r' της πηγής δημιουργίας του, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.2.1). Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται στη θέση V, όπου οι πυκνότητες ρ και ζ είναι μη μηδενικές.

Δηλαδή, το δυναμικό $\varphi(\mathrm{r},t)$, σε ένα σημείο r του πεδίου, στο χρόνο t, μπορεί να υπολογιστεί υπερθέτοντας τα πεδία, εξαιτίας του απειροελάχιστου φορτίου $\rho(\mathrm{r}',t')d^3\mathrm{r}'$, το οποίο υπάρχει στο σημείο $d^3\mathrm{r}'$, τη χρονική στιγμή t', η οποία είναι R/c, δευτερόλεπτα πριν την t, δηλαδή, $t'=t-R/c$.

Έτσι, σε συνδυασμό με την ενστικτώδη μας αντίληψη του συνηθισμένου, ένα φορτίο στο σημείο r' της πηγής, χρειάζεται R/c δευτερόλεπτα για να φτάσει στο σημείο r του πεδίου, αν και διαχέεται με την ταχύτητα του φωτός.

Οι εξισώσεις (1.2.1) αναφέρονται στο



Σχήμα 1.2.1 Καθυστερημένα δυναμικά δημιουργούμενα από περιορισμένη διανομή ρεύματος /φορτιού.

είναι γνωστές ως καθυστερούμενα δυναμικά, διότι οι πηγές μέσα στα ολοκληρώματα υπολογίζονται στον καθυστερούμενο χρόνο $t' = t - R/c$.

Για να αποδειχθεί η (1.2.1), αρχικά αναφερόμαστε στη λύση της ακόλουθης κλιμακωτής κυματικής

εξίσωσης ενός χρονικά εξαρτώμενου σημείου της πηγής του πεδίου,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(t)\delta^{(3)}(\mathrm{r}) \qquad (1.2.2)$$

Όπου f(t) είναι μια αυθαίρετη χρονική συνάρτηση και $\delta^{(3)}(\mathrm{r})$ είναι μια τρισδιάστατη συνάρτηση δέλτα. Δείχνουμε παρακάτω τη συνηθισμένη λύση της εξίσωσης (1.2.2),

$$u(\mathrm{r},t) = \frac{f(t')}{4\pi r} = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r} = f\left(t - \frac{r}{c}\right)g(\mathrm{r}), \text{ όπου } g(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi r} \qquad (1.2.3)$$

με $t' = t - r/c$ και $r = |\mathrm{r}|$. Η συνάρτηση g(r) αναφέρεται ως συνάρτηση Green για τα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα Coulomb και ικανοποιεί την

$$\nabla g = -\hat{\mathrm{r}}\frac{1}{4\pi r^2} = -\hat{\mathrm{r}}\frac{g}{r}, \qquad \nabla^2 g = -\delta^{(3)}(\mathrm{r}) \qquad (1.2.4)$$

Όπου $\hat{\mathrm{r}} = \mathrm{r}/r$ είναι η μοναδιαία ακτινωτή απόσταση. Σημειώνουμε, επίσης, ότι επειδή $f(t - r/c)$ εξαρτάται από το r, λόγω μόνο της t εξάρτησης, έχουμε,

$$\frac{\partial}{\partial r} f(t - r/c) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f(t - r/c) = -\frac{1}{c} f$$

Ακολουθεί ότι $\nabla f = -\hat{\mathrm{r}}\dot{f}/c$ και

$$\nabla^2 f = -\left(\nabla\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\frac{\dot{f}}{c} - \frac{1}{c}\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla\dot{f} = -\left(\nabla\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\frac{\dot{f}}{c} - \frac{1}{c}\hat{\mathbf{r}}\cdot\left(-\hat{\mathbf{r}}\frac{\ddot{f}}{c}\right) = -\frac{2\dot{f}}{cr} + \frac{1}{c^2}\ddot{f} \qquad (1.2.5)$$

Όπου χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα $\nabla\cdot\hat{\mathbf{r}} = 2/r$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1.2.3) και (1.2.5), στην ταυτότητα

$$\nabla^2 u = \nabla^2\left(fg\right) = 2\nabla f\cdot\nabla g + g\nabla^2 f + f\nabla^2 g$$

και προκύπτει,

$$\nabla^2 u = 2\left(-\hat{\mathbf{r}}\frac{\dot{f}}{c}\right)\cdot\left(-\mathbf{r}\frac{\hat{g}}{r}\right) - \frac{2\dot{f}}{cr}g + \frac{1}{c^2}fg - f\left(t-\frac{r}{c}\right)\delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

Οι δύο πρώτοι όροι απαλείφονται και ο τέταρτος μπορεί να γραφεί ως $f(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ επειδή η συνάρτηση δέλτα επιβάλλει r = 0. αναγνωρίζοντας ότι ο τρίτος όρος είναι $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}fg$

Έχουμε,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

Που είναι η εξίσωση (1.2.2). Στη συνέχεια μεταφέρουμε το σημείο της πηγής στο σημείο r’ και βρίσκουμε τη λύση της κυματικής εξίσωσης,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(\mathbf{r}',t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad\Rightarrow\quad u(\mathbf{r},t) = \frac{f\left(\mathbf{r}',t-R/c\right)}{4\pi R} \qquad (1.2.6)$$

Όπου $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ και έχουμε επιτρέψει στην συνάρτηση f να εξαρτάται και από το r’ επίσης. Σημειώνουμε ότι το r’ εδώ είναι σταθερό και το r μεταβλητή.

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα, μπορούμε να σχηματίσουμε τον συνδυασμό πολλών σημείων της πηγής, που αντιστοιχούν σε πολλές μεταβλητές r’, παίρνοντας έτσι, τον αντίστοιχο συνδυασμό των λύσεων. Για παράδειγμα, το άθροισμα δύο πηγών θα δώσει τελικά το άθροισμα των λύσεων,

$$f(\mathbf{r}_1',t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1') + f(\mathbf{r}_2',t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2') \quad\Rightarrow\quad \frac{f\left(\mathbf{r}_1',t-R_1/c\right)}{4\pi R_1} + \frac{f\left(\mathbf{r}_2',t-R_2/c\right)}{4\pi R_2}$$

Όπου $R_1 = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1'|, R_2 = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2'|$. Γενικότερα, ολοκληρώνοντας για όλη την περιοχή V, όπου η $f(\mathbf{r}',t)$ είναι μη μηδενική, έχουμε το άθροισμα των πηγών,

$$f(\mathbf{r},t) = \int_v f(\mathbf{r}',t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'$$

Και το αντίστοιχο άθροισμα των λύσεων,

$$u(\mathbf{r},t) = \int_v \frac{f\left(\mathbf{r}',t-R/c\right)}{4\pi R}d^3\mathbf{r}' \qquad (1.2.7)$$

Όπου $R = |\mathrm{r} - \mathrm{r}'|$. Έτσι, έχουμε τη λύση της γενικής κυματικής εξίσωσης,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(\mathrm{r},t) \tag{1.2.8}$$

Τα καθυστερούμενα δυναμικά (1.2.1), είναι ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης (1.2.7), που εφαρμόζονται όταν $f(\mathrm{r},t) = \rho(\mathrm{r},t)/\varepsilon$ και $f(\mathrm{r},t) = \mu J(\mathrm{r},t)$.

1.3 Αρμονική Χρονική Εξάρτηση.

Αφού, πρωταρχικά, ενδιαφερόμαστε για μονοφασικά κύματα, θα μετασχηματίσουμε κατά Fourier όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα, ή, ισοδύναμα, μπορούμε να ορίσουμε μια ημιτονοειδή χρονική εξάρτηση $e^{j\omega t}$ για όλες τις ποσότητες. Για παράδειγμα,

$$\varphi(\mathrm{r},t) = \varphi(\mathrm{r})e^{j\omega t}, \rho(\mathrm{r},t) = \rho(\mathrm{r})e^{j\omega t}$$

Έπειτα, οι καθυστερούμενες λύσεις (1.2.1) γίνονται,

$$\varphi(\mathrm{r})e^{j\omega t} = \int_v \frac{\rho(\mathrm{r}')e^{j\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)}}{4\pi\varepsilon R} d^3\mathrm{r}'$$

Απαλείφοντας τον κοινό παράγοντα $e^{j\omega t}$ και στις δύο πλευρές, έχουμε τις φάσεις των καθυστερούμενων δυναμικών, όπου $R = |\mathrm{r} - \mathrm{r}'|$,

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\mathrm{r}) &= \int_v \frac{\rho(\mathrm{r}')e^{-jkR}}{4\pi\varepsilon R} d^3\mathrm{r}' \\ A(\mathrm{r}) &= \int_v \frac{\mu J(\mathrm{r}')e^{-jkR}}{4\pi R} d^3\mathrm{r}'\end{aligned}} \quad \text{, όπου} \quad \boxed{k = \frac{\omega}{c}} \tag{1.3.1}$$

Η ποσότητα κ αναπαριστά τη σταθερά διάδοσης κύματος στον ελεύθερο χώρο και σχετίζεται με το μήκος κύματος με τη σχέση $k = 2\pi/\lambda$. Ένας άλλος τρόπος για έχουμε τις εξισώσεις (1.3.1) είναι να ξεκινήσουμε με τις κυματικές εξισώσεις αντικαθιστώντας τα παράγωγα του χρόνου με $\partial_t \to j\omega$. Οι εξισώσεις (13.1.7) γίνονται, τότε, οι εξισώσεις Helmholtz,

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\varphi + k^2\varphi &= -\frac{1}{\varepsilon}\rho \\ \nabla^2 A + k^2 A &= -\mu J\end{aligned}} \tag{1.3.2}$$

Οι λύσεις τους μπορούν να γραφούν με την συνημιτονοειδή μορφή,

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\mathrm{r}) &= \int_v \frac{1}{\varepsilon}\rho(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')d^3\mathrm{r}' \\ A(\mathrm{r}) &= \int_v \mu J(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')d^3\mathrm{r}'\end{aligned}} \qquad (1.3.3)$$

Όπου G(r) είναι η συνάρτηση Green για την εξίσωση Helmholtz,

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta^{(3)}(\mathrm{r}) \quad , \qquad G(\mathrm{r}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \qquad (1.3.4)$$

Αντικαθιστώντας $\partial/\partial t$ με $j\omega$ η συνθήκη Lorenz (1.1.4) παίρνει τη μορφή,

$$\nabla \cdot A + j\omega\mu\varepsilon\varphi = 0 \qquad (1.3.5)$$

Όμοια τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία (1.1.2) γίνονται,

$$\boxed{\begin{aligned}E &= -\nabla\varphi - j\omega A \\ H &= \frac{1}{\mu}\nabla \times A\end{aligned}} \qquad (1.3.6)$$

Με τη βοήθεια της συνθήκης Lorenz το πεδίο Ε μπορεί να γραφεί τέλεια ως συνάρτηση της σταθεράς δυναμικού. Λύνοντας την (1.3.5) για το κλιμακωτό δυναμικό, $\varphi = -\nabla \cdot A / j\omega\mu\varepsilon$, και αντικαθιστώντας στην (1.3.6), έχουμε,

$$E = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla \cdot A) - j\omega A = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\nabla(\nabla \cdot A) + k^2 A\right]$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε $\omega^2\mu\varepsilon = \omega^2/c^2 = k^2$. Συνοψίζοντας, με το $A(\mathrm{r})$ υπολογισμένο από την εξίσωση (1.3.1), τα πεδία Ε και Η δίνονται από,

$$\boxed{\begin{aligned}E &= \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\nabla(\nabla \cdot A) + k^2 A\right] \\ H &= \frac{1}{\mu}\nabla \times A\end{aligned}} \qquad (1.3.7)$$

Ένας άλλος τρόπος για να εκφράσουμε το ηλεκτρικό πεδίο είναι,

$$\boxed{E = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\left[\nabla \times (\nabla \times A) - \mu J\right]} \qquad (1.3.8)$$

Αυτός είναι ο νόμος του Ampere για το Ε. Όταν προσαρμόζεται σε χώρο όπου δεν υπάρχει πηγή φορτίου, όπως η περιοχή ακτινοβολίας, η (1.3.8) απλοποιείται ως εξής,

$$\boxed{E = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla\times(\nabla\times A)} \tag{1.3.9}$$

Τα πεδία E και H μπορούν να εκφραστούν άμεσα σε συνάρτηση με τις πηγές ρ, J. Πράγματι, αντικαθιστώντας τις λύσεις (1.3.3) στην (1.3.6) και (1.3.7), έχουμε,

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \int_v \left[-j\omega\mu JG + \frac{1}{\varepsilon}\rho\nabla' G \right] dV' = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\int_v \left[(J\cdot\nabla')\nabla' G + k^2 JG \right] dV' \\ H &= \int_v J\times\nabla' G dV' \end{aligned}} \tag{1.1.10}$$

Εδώ τα ρ, J αναπαριστούν τα $\rho(\mathrm{r}')$, $J(\mathrm{r}')$. Το ανάδελτα ενεργεί στα ολοκληρώματα μόνο για τα G και επειδή αυτό εξαρτάται από τη διαφορά r – r' , μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ανάδελτα με $\nabla G(\mathrm{r}-\mathrm{r}') = -\nabla' G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')$. Επίσης, το $d^3\mathrm{r}'$ αντικαθίσταται με το dV'.

Κατά τον υπολογισμό της (1.3.10), έπρεπε να υπολογίσουμε το ανάδελτα και τα ολοκληρώματα με βάση το V. Όταν το r είναι έξω από την περιοχή V, όπως συμβαίνει στις περισσότερες εφαρμογές, τότε τα αποτελέσματα διαφέρουν. Όταν το r βρίσκεται μέσα στην περιοχή V, τότε το μονό ανάδελτα μπορεί να υπολογιστεί, όπως στην πρώτη έκφραση των E και H. Εντούτοις, για τον υπολογισμό των διπλών ανάδελτα, απαιτούνται περαιτέρω στοιχεία της πηγής του φορτίου. Εναλλάσσοντας το διπλό $\nabla\times\nabla\times$ με το ολοκλήρωμα ως προς A στην εξίσωση (1.3.8) έχουμε,

$$E = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\nabla\times\nabla\times\int_v JG dV' - J\right] = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\frac{2}{3}J + PV\int_v \nabla\times\nabla\times(JG)dV' - J\right]$$

Όπου «PV» αναπαριστά την «αρχική τιμή». Επειδή, το ανάδελτα δεν ενεργεί στο $J(\mathrm{r}')$, έχουμε,

$$\nabla\times\nabla\times(JG) = \nabla\times(\nabla G\times J) = (J\cdot\nabla)\nabla G - J\nabla^2 G = (J\cdot\nabla')\nabla' G + k^2 JG$$

Όπου στο τελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε ∇ με $-\nabla'$ και $\nabla^2 G = -k^2 G$. Ακολουθεί ότι,

$$E = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[PV\int_v \left[(J\cdot\nabla')\nabla' G + k^2 JG\right]dV' - \frac{1}{3}J\right] \tag{1.3.11}$$

Κάποιες εμφανείς εφαρμογές που συζητήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι :

a) Ο καθορισμός των πεδίων γραμμικών κεραιών καλώδιο
b) Τα πεδία που παράγονται από ηλεκτρικά και μαγνητικά δίπολα και
c) Το θεώρημα εξασθένησης των Ewald – Oseen και η μικροσκοπική καταγωγή του πίνακα διάθλασης.

Έπειτα, στο κεφάλαιο 1.7 θα συζητήσουμε την απλοποίηση των καθυστερούμενων δυναμικών (1.3.3) για τα προβλήματα ακτινοβολίας.

1.4 Πεδία Γραμμικής Κεραίας Καλώδιο.

Οι εξισώσεις (1.3.7) απλοποιούνται σημαντικά στην ειδική πρακτική περίπτωση γραμμικής κεραίας καλώδιο, η οποία είναι μια λεπτή κυλινδρική κεραία. Το σχήμα 1.4.1 δείχνει την περίπτωση μιας τέτοιας κεραίας στο χώρο κατά τον άξονα z, με συγκεκριμένο μήκος και η οποία διαρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα εντάσεως $I(z')$.

Από το γεγονός ότι η ακτίνα του καλωδίου είναι πολύ μικρότερη από το μήκος του, συμπεραίνουμε ότι οι προβολές της πυκνότητας της έντασης $J(\mathrm{r}')$ από τον άξονα z στους άλλους δύο άξονες, είναι μηδενικές.

Έτσι,

$$J(\mathrm{r}') = \hat{z}\, I(z')\delta(x')\delta(y') \tag{1.4.1}$$

Στην πραγματική περίπτωση κεραίας συγκεκριμένης ακτίνας α, η πυκνότητα της έντασης θα

υπολογιστεί κατά την ροή της κυλινδρικής επιφάνειας της κεραίας, δηλαδή σε μία απόσταση ρ=α.

Υποθέτοντας ότι υπάρχει κυλινδρική συμμετρία, η πυκνότητα έντασης θα είναι,

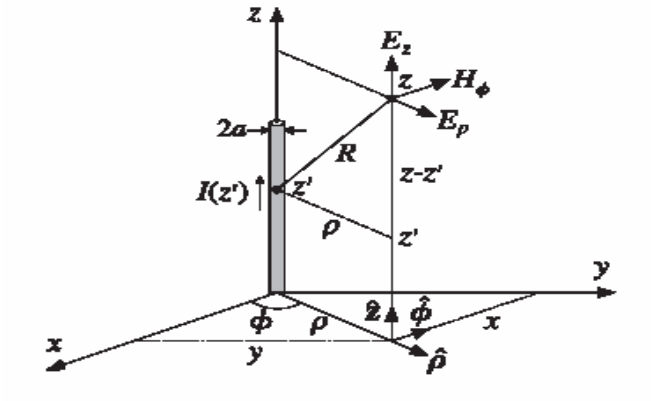
$$J(\mathrm{r}') = \hat{z}\, I(z')\delta(\rho' - \alpha)\frac{1}{2\pi\alpha} \tag{1.4.2}$$

Αυτή η περίπτωση θα συζητηθεί αναλυτικά στο κεφάλαιο 4. Και στις δύο περιπτώσεις, ολοκληρώνοντας την πυκνότητα έντασης ως προς τις προβολές της κεραίας, έχουμε την ένταση,

$$\int J(x', y', z')dx'dy' = \int J(\rho', \varphi', z')\rho' d\rho' d\varphi' = \hat{z}\, I(z')$$

Εξαιτίας της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος, η χρήση των κυλινδρικών συντεταγμένων είναι κατάλληλη, ειδικά για τον καθορισμό των πεδίων κοντά στην κεραία (οι κυλινδρικές συντεταγμένες όπως αναφέρονται στο κεφάλαιο 1.8).

Από την άλλη, τα ακτινοβολούντα πεδία σε μακρινές αποστάσεις από την κεραία περιγράφονται καλύτερα από τις σφαιρικές συντεταγμένες. Αυτό συμβαίνει διότι οποιαδήποτε συγκεκριμένη πηγή έντασης, από μακρινές αποστάσεις, φαίνεται ως σημείο.



Σχήμα 1.4.1 Λεπτή κεραία καλώδιο

Εισάγοντας την εξίσωση (1.4.1) στην (1.3.1), ορίζεται το δυναμικό κατά άξονα z, και βάσει της κυλινδρικής συμμετρίας έχουμε,

$$A(\mathrm{r}) = \int_v \frac{\mu J(\mathrm{r}')e^{-jkR}}{4\pi R} d^3\mathrm{r}' = \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_v I(z')\delta(x')\delta(y')\frac{e^{-jkR}}{R}dx'dy'dz' = \hat{z}\frac{\mu}{4\pi}\int_v I(z')\frac{e^{-jkR}}{R}dz'$$

Όπου $R = |\mathrm{r} - \mathrm{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4.1. Το ολοκλήρωμα του z' είναι με

βάση το μήκος της κεραίας. Έτσι, $A(\mathrm{r}) = \hat{z}\, A_z(\rho, z)$ με

$$\boxed{A_z(\rho, z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_L I(z')\frac{e^{-jkR}}{R}dz'}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \tag{1.4.3}$$

Αυτή είναι η λύση του διανύσματος z της εξίσωσης Helmholtz (1.3.2),

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I(z)\delta(x)\delta(y)$$

Εξαιτίας της κυλινδρικής συμμετρίας, μπορούμε να θέσουμε $\partial/\partial\varphi = 0$. Τότε το ανάδελτα και οι σταθερές Laplace είναι $\nabla = \hat{\rho}\partial_\rho + \hat{z}\partial_z$ και $\nabla^2 = \rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \vartheta_z^2$. Έτσι, η εξίσωση Helmholtz μπορεί να γραφεί με τη μορφή,

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho A_z) + \partial_z^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I(z)\delta(x)\delta(y)$$

Μακριά από την κεραία έχουμε την ομογενή εξίσωση,

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho A_z) + \partial_z^2 A_z + k^2 A_z = 0 \tag{1.4.4}$$

Σημειώνοντας ότι $\nabla \cdot A = \partial_z A_z$, έχουμε από τη συνθήκη Lorenz,

$$\boxed{\varphi = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\partial_z A_z} \tag{1.4.5}$$

Το διάνυσμα z του ηλεκτρικού φορτίου δίνεται από την εξίσωση (1.3.7),

$$j\omega\mu\varepsilon E_z = \partial_z(\nabla \cdot A) + k^2 A_z = \partial_z^2 A_z + k^2 A_z$$

Και το διάνυσμα της ακτίνας,

$$j\omega\mu\varepsilon E_\rho = \partial_\rho(\nabla \cdot A) = \partial_\rho\partial_z A_z$$

Χρησιμοποιώντας $B = \nabla \times A = \left(\hat{\rho}\partial_\rho + \hat{z}\partial_z\right) \times \left(\hat{z}\, A_z\right) = \left(\hat{\rho} \times \hat{z}\right)\partial_\rho A_z = -\hat{\phi}\partial_\rho A_z$, έχουμε ότι το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο ένα διάνυσμα φ που δίνεται από την $B_\phi = -\partial_\rho A_z$.

Συνοψίζοντας, οι συντελεστές του μη μαγνητικού πεδίου μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση του A(z) ως εξής,

$$\boxed{\begin{aligned} j\omega\mu\varepsilon E_z &= \partial_z^2 A_z + k^2 A_z \\ j\omega\mu\varepsilon E_\rho &= \partial_\rho \partial_z A_z \\ \mu H_\phi &= -\partial_\rho A_z \end{aligned}} \qquad (1.4.6)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.4.4), μπορούμε να επανεκφράσουμε το E_Z με τη μορφή,

$$j\omega\mu\varepsilon E_z = -\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\partial_\rho A_z\right) = \mu\frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho H_\phi\right) \qquad (1.4.7)$$

Αυτό, φυσικά, είναι ισοδύναμο με τον συντελεστή z του νόμου του Ampere. Μάλιστα, ένας πιο βολικός τρόπος κατασκευής των πεδίων είναι, χρησιμοποιώντας την πρώτη από τις εξισώσεις (1.4.6), για να δημιουργηθεί το E_z, και έπειτα, ολοκληρώνοντας την (1.4.7) για να πάρουμε το H_φ και μετά, χρησιμοποιώντας τον συντελεστή ρ του νόμου του Ampere, για να πάρουμε το E_ρ. Το σύστημα λύσεων των εξισώσεων είναι

$$\boxed{\begin{aligned} j\omega\mu\varepsilon E_z &= \partial_z^2 A_z + k^2 A_z \\ \partial_\rho\left(\rho H_\phi\right) &= j\omega\varepsilon\rho E_z \\ j\omega\varepsilon E_\rho &= -\partial_z H_\phi \end{aligned}} \qquad (1.4.8)$$

1.5 Πεδία ηλεκτρικών και μαγνητικών Δίπολων.

Η ανακάλυψη των πεδίων που παράγονται από τα χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά δίπολα, ήταν ιστορικά σημαντική και αποτέλεσε ένα πρωτότυπο παράδειγμα για τα προβλήματα ακτινοβολίας. Αναφερόμαστε σε ένα δίπολο σημείο, το οποίο βρίσκεται αρχικά στο κενό, τη στιγμή $\boldsymbol{\rho}$. Υποθέτοντας ότι υπάρχει αρμονική χρονική εξάρτηση $e^{j\omega t}$, η αντίστοιχη πολικότητα (ύπαρξη του δίπολου στο χώρο) θα είναι $P(\mathrm{r}) = p\delta^{(3)}(\mathrm{r})$. Είδαμε στην εξίσωση (1.1.5.) ότι η αντίστοιχη ένταση πολικότητας και η πυκνότητα φορτίου είναι:

$$J = \frac{\partial P}{\partial t} = j\omega P, \quad \rho = -\nabla\cdot P \qquad (1.5.1)$$

Έτσι,

$$J(\mathrm{r}) = j\omega p\delta^{(3)}(\mathrm{r}), \quad \rho(\mathrm{r}) = -p\cdot\nabla\delta^{(3)}(\mathrm{r}) \qquad (1.5.2)$$

Εξαιτίας της παρουσίας των συναρτήσεων δέλτα, τα ολοκληρώματα στην εξίσωση (1.3.3), μπορούν να γίνουν τετριμμένα, οδηγώντας στα σταθερά και κλιμακούμενα δυναμικά:

$$A(\mathrm{r}) = \mu_0\int j\omega p\delta^{(3)}(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' = j\omega\mu_0 pG(\mathrm{r}) \qquad (1.5.3)$$

$$\varphi(\mathrm{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \left[p\cdot\nabla'\delta^{(3)}(\mathrm{r}')\right]G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,p\cdot\nabla G(\mathrm{r})$$

όπου το ολοκλήρωμα ως προς $\boldsymbol{\varphi}$ έγινε τμηματικά. Αλλιώς, το φ μπορούσε να οριστεί από τη συνθήκη του Lorenz κατά πλάτος $\nabla\cdot A + j\omega\mu_0\varepsilon_0\varphi = 0$.

Τα πεδία E, H υπολογίζονται από την εξίσωση (1.3.6) ή από την (1.3.7) ή μακριά από την περιοχή προέλευσης, από την (1.3.9). Βρίσκουμε ότι, με $k^2 = \omega^2/c_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$:

$$\boxed{\begin{aligned} E(\mathrm{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\left[\nabla G(\mathrm{r})\times p\right] = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[k^2 p + (p\cdot\nabla)\nabla\right]G(\mathrm{r}) \\ H(\mathrm{r}) &= j\omega\nabla G(\mathrm{r})\times p \end{aligned}} \qquad (1.5.4)$$

Για r ≠ 0. Η συνάρτηση Green G(r) και το ολοκλήρωμά της είναι:

$$G(\mathrm{r}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}, \quad \nabla G(\mathrm{r}) = -\hat{\mathrm{r}}\left(jk+\frac{1}{r}\right)G(\mathrm{r}) = -\hat{\mathrm{r}}\left(jk+\frac{1}{r}\right)\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

όπου $r = |\mathrm{r}|$ και $\hat{\mathrm{r}}$ είναι η σταθερή μονάδα ακτίνας $\hat{\mathrm{r}} = \mathrm{r}/r$. Εισάγοντας αυτά τα δύο στην (1.5.4) προκύπτουν οι πιο ειδικές εκφράσεις :

$$\begin{aligned} E(\mathrm{r}) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(jk+\frac{1}{r}\right)\left[\frac{3\hat{\mathrm{r}}\left(\hat{\mathrm{r}}\cdot p\right)-p}{r}\right]G(\mathrm{r}) + \frac{k^2}{\varepsilon_0}\hat{\mathrm{r}}\times\left(p\times\hat{\mathrm{r}}\right)G(\mathrm{r}) \\ H(\mathrm{r}) &= j\omega\left(jk+\frac{1}{r}\right)\left(p\times\hat{\mathrm{r}}\right)G(\mathrm{r}) \end{aligned} \qquad (1.5.5)$$

Εάν το δίπολο μετακινηθεί στη θέση r_0 , έτσι ώστε $P(\mathrm{r}) = p\delta^{(3)}(\mathrm{r}-\mathrm{r}_0)$ τότε τα πεδία δίνονται επίσης από τις (1.5.4) και (1.5.5) με την αντικατάσταση $G(\mathrm{r})\to G(\mathrm{R})$ και $\hat{\mathrm{r}}\to\hat{\mathrm{R}}$, όπου $\mathrm{R} = \mathrm{r}-\mathrm{r}_0$.

Οι εξισώσεις (1.5.5) περιγράφουν τα κοντινά και τα ακτινοβολούντα πεδία ταυτόχρονα. Ο περιορισμός $\omega = 0$ (ή $k = 0$) φανερώνει το συνηθισμένο ηλεκτρικό πεδίο ηλεκτροστατικού δίπολου, μειούμενο κατά $1/r^3$. Από την άλλη πλευρά, για τα ακτινοβολούντα πεδία, η εξασθένιση γίνεται κατά $1/r$, και έχουμε (με $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$):

$$\begin{aligned} E_{rad}(\mathrm{r}) &= \frac{k^2}{\varepsilon_0}\hat{\mathrm{r}}\times\left(p\times\hat{\mathrm{r}}\right)G(\mathrm{r}) = \frac{k^2}{\varepsilon_0}\hat{\mathrm{r}}\times\left(p\times\hat{\mathrm{r}}\right)\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \\ H_{rad}(\mathrm{r}) &= j\omega jk\left(p\times\hat{\mathrm{r}}\right)G(\mathrm{r}) = \frac{k^2}{\eta_0\varepsilon_0}\left(\hat{\mathrm{r}}\times p\right)\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \end{aligned} \qquad (1.5.6)$$

Συσχετίζονται με $\eta_0 H_{rad} = \hat{\mathrm{r}} \times E_{rad}$, η οποία είναι μια γενική σχέση για τα ακτινοβολούντα πεδία. Οι ίδιες εκφράσεις μπορούν ακόμη να προέρθουν από την εξίσωση (1.5.4) αντικαθιστώντας $\nabla \to -jk\hat{\mathrm{r}}$.

Τα κοντινά, μη ακτινοβολούντα μεγέθη, τα οποία εξασθενούν πιο γρήγορα από $1/r$, είναι σημαντικά στον νέο τομέα των οπτικών μικροπεδίων. Οι διηλεκτρικές άκρες μεγέθους τάξης nano, (κατασκευασμένες από σταδιακά ελαττούμενη ίνα), ενεργούν ως μικροσκοπικά δίπολα τα οποία οδηγούν στη δημιουργία μεταβατικών πεδίων, έχοντας ως αποτέλεσμα μια δραματική αύξηση (της τάξεως του δέκα) της ανάλυσης των οπτικών μικροσκοπίων πέρα από το όριο διάθλασης του Rayleigh και σε βαθμό μεγέθους ατομικής κλίμακας.

Ένα μαγνητικό δίπολο στην περιοχή προέλευσης, αναφερόμενο ως ***m*** περιγράφεται από τη μαγνητική σταθερά $M = m\delta^{(3)}(\mathrm{r})$. Η μαγνητική ένταση θα είναι $J = \nabla \times M = \nabla\delta^{(3)}(\mathrm{r}) \times m$. Επειδή $\nabla \cdot J = 0$, δεν υπάρχει μαγνητική πυκνότητα φορτίου, και επομένως ούτε κλιμακούμενο δυναμικό ***φ.*** Το σταθερό δυναμικό θα είναι:

$$A(\mathrm{r}) = \mu_0 \int \nabla\delta^{(3)}(\mathrm{r}) \times mG(\mathrm{r} - \mathrm{r}')dV' = \mu_0 \nabla G(\mathrm{r}) \times m \tag{1.5.7}$$

Από την (13.3.6) έχουμε,

$$\boxed{\begin{aligned} E(\mathrm{r}) &= -j\omega\mu_0 \nabla G(\mathrm{r}) \times m \\ H(\mathrm{r}) &= \nabla \times [\nabla G(\mathrm{r}) \times m] = [k^2 m + (m \cdot \nabla)\nabla] G(\mathrm{r}) \end{aligned}} \tag{1.5.8}$$

Η οποία γίνεται ειδικά,

$$E(\mathrm{r}) = j\omega\mu_0 \left(jk + \frac{1}{r} \right) \left(\hat{\mathrm{r}} \times m \right) G(\mathrm{r})$$

$$H(\mathrm{r}) = \left(jk + \frac{1}{r} \right) \left[\frac{3\hat{\mathrm{r}}\left(\hat{\mathrm{r}} \cdot m \right) - m}{r} \right] G(\mathrm{r}) + k^2 \hat{\mathrm{r}} \times \left(m \times \hat{\mathrm{r}} \right) G(\mathrm{r}) \tag{1.5.9.}$$

Τα αντίστοιχα ακτινοβολούντα πεδία θα είναι,

$$\begin{aligned} E_{rad}(\mathrm{r}) &= j\omega\mu_0 jk \left(\hat{\mathrm{r}} \times m \right) G(\mathrm{r}) = \eta_0 k^2 \left(m \times \hat{\mathrm{r}} \right) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \\ H_{rad}(\mathrm{r}) &= k^2 \hat{\mathrm{r}} \times \left(m \times \hat{\mathrm{r}} \right) G(\mathrm{r}) = k^2 \hat{\mathrm{r}} \times \left(m \times \hat{\mathrm{r}} \right) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Τα πεδία του μαγνητικού δίπολου μπορούν να προέρθουν από αυτά του ηλεκτρικού κάνοντας τους εξής μετασχηματισμούς $E \to H$, $H \to -E$, $\varepsilon_0 \to \mu_0$, $\mu_0 \to \varepsilon_0$, $\eta_0 \to 1/\eta_0$ και $p \to \mu_0 m$.

Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά δίπολα είναι ουσιαστικά ισοδύναμα με τις γραμμικές και επαναλαμβανόμενες διπολικές ερτζιανές κεραίες αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.5.1:

Αναζητούμε τις ειδικές εκφράσεις για τα πραγματικά ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ενός ταλαντωμένου δίπολου $p(t)=p\hat{z}\cos\omega t$ κατά άξονα z. Επίσης, αναζητούμε και αναπαριστούμε γραφικά τις γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου σε διάφορες χρονικές στιγμές. Το πρόβλημα αυτό έχει σημαντική ιστορία καθώς ερευνήθηκε αρχικά από τον Hertz το 1889.

Επαναφέροντας τον συντελεστή $e^{j\omega t}$ στην εξίσωση (13.5.5), σε πραγματική βάση, έχουμε τα πεδία,

$$E(\mathrm{r})=p\left[k\sin(kr-\omega t)+\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}\right]\frac{3\hat{\mathrm{r}}\left(\hat{\mathrm{r}}\cdot\hat{z}\right)-\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+\frac{pk^2\hat{\mathrm{r}}\times\left(\hat{z}\times\hat{\mathrm{r}}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r}\cos(kr-\omega t)$$

$$H(\mathrm{r})=p\omega\left[-k\cos(kr-\omega t)+\frac{\sin(kr-\omega t)}{r}\right]\left[\frac{\hat{z}\times\hat{\mathrm{r}}}{4\pi r}\right]$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε, $\hat{z}=\hat{\mathrm{r}}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta$. Αυτό δίνει $3\hat{\mathrm{r}}\left(\hat{\mathrm{r}}\cdot\hat{z}\right)-\hat{z}=2\hat{\mathrm{r}}\cos\theta+\hat{\theta}\sin\theta$, $\hat{\mathrm{r}}\times\left(\hat{z}\times\hat{\mathrm{r}}\right)=-\hat{\theta}\sin\theta$ και $\hat{z}\times\hat{\mathrm{r}}=\hat{\phi}\sin\theta$. Έτσι, οι μη μηδενικοί συντελεστές είναι,

$$E_r(\mathrm{r})=p\left[k\sin(kr-\omega t)+\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}\right]\left[\frac{2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right]$$

$$E_\theta(\mathrm{r})=p\left[k\sin(kr-\omega t)+\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}\right]\left[\frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right]-\frac{pk^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\cos(kr-\omega t)$$

$$H_\phi(\mathrm{r})=p\omega\left[-k\cos(kr-\omega t)+\frac{\sin(kr-\omega t)}{r}\right]\frac{\sin\theta}{4\pi r}$$

Εξ ορισμού, το ηλεκτρικό πεδίο εφάπτεται στις γραμμές του πεδίου. Μία μετακίνηση ***dr*** κατά μήκος της εφαπτομένης, θα είναι παράλληλη στο ***E*** στο σημείο αυτό. Αυτό υποθέτει ότι $d\mathrm{r}\times E=0$, το οποίο μπορεί να καθορίσει τις γραμμές. Εξαιτίας της αζιμουθιακής συμμετρίας στη μεταβλητή ***φ***, έχουμε για ***φ=0,***

$$d\mathrm{r}\times E=\left(\hat{\mathrm{r}}\,dr+\hat{\theta}\,rd\theta\right)\times\left(\hat{\mathrm{r}}\,E_r+\hat{\theta}\,E_\theta\right)=\hat{\phi}\left(drE_\theta-rd\theta E_r\right)=0\quad\Rightarrow\quad\frac{dr}{d\theta}=\frac{rE_r}{E_\theta}$$

Η σχέση αυτή ορίζει το r ως συνάρτηση του θ, δίνοντας την καμπυλωτή αναπαράσταση των γραμμών. Για να λύσουμε αυτή την εξίσωση, ξαναγράφουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε συνάρτηση των αδιάστατων μεταβλητών $u=kr$ και $\delta=\omega t$ ορίζοντας $E_0=pk^3/4\pi\varepsilon_0$,

$$E_r = E_0 \frac{2\cos\theta}{u^2}\left[\sin(u-\delta)+\frac{\cos(u-\delta)}{u}\right]$$
$$E_\theta = E_0 \frac{\sin\theta}{u}\left[\cos(u-\delta)-\frac{\cos(u-\delta)}{u^2}-\frac{\sin(u-\delta)}{u}\right]$$

Σημειώνουμε ότι οι συντελεστές μέσα στις αγκύλες συσχετίζονται ως εξής,

$$Q(u)=\sin(u-\delta)+\frac{\cos(u-\delta)}{u}$$
$$Q'(u)=\frac{dQ(u)}{du}=\cos(u-\delta)-\frac{\cos(u-\delta)}{u^2}-\frac{\sin(u-\delta)}{u}$$

Έτσι, τα πεδία είναι,

$$E_r = E_0 \frac{2\cos\theta}{u^2}Q(u),\ E_\theta = -E_0 \frac{\sin\theta}{u}Q'(u)$$

Η εξίσωση των γραμμών της μεταβλητής u θα είναι,

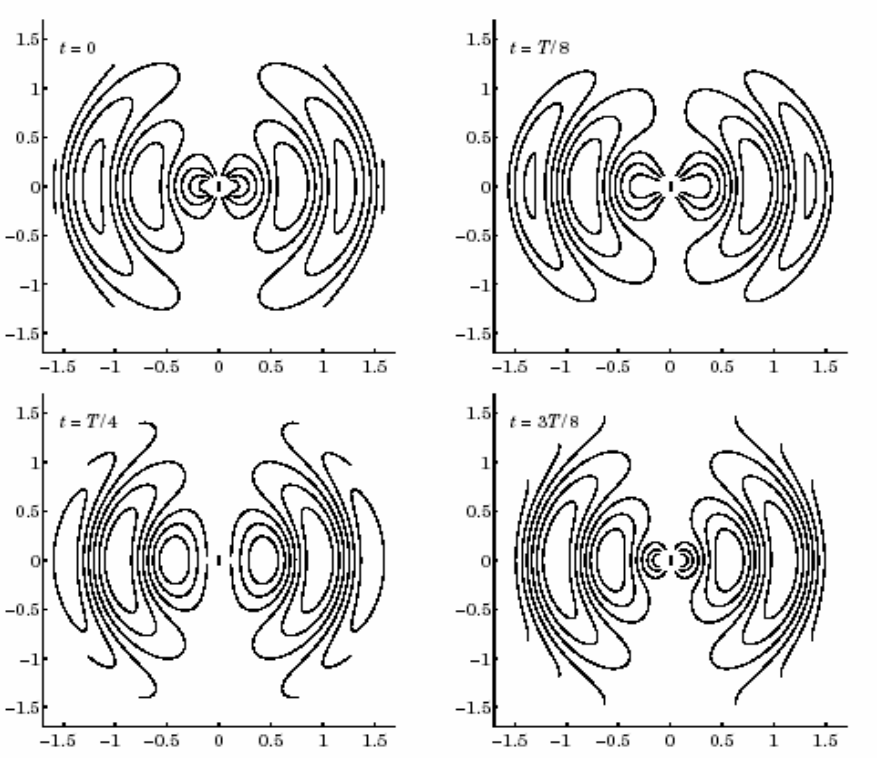
$$\frac{du}{d\theta}=\frac{uE_r}{E_\theta}=-2\cot\theta\left[\frac{Q(u)}{Q'(u)}\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta}\left[\ln Q(u)\right]=-2\cot\theta=-\frac{d}{d\theta}\left[\ln\sin^2\theta\right]$$

Η οποία δίνει,

$$\frac{d}{d\theta}\ln\left[Q(u)\sin^2\theta\right]=0 \quad \Rightarrow \quad Q(u)\sin^2\theta=C$$

Όπου C είναι μία σταθερά. Έτσι, οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δίνονται ειδικά από ,

$$\left[\sin(u-\delta)+\frac{\cos(u-\delta)}{u}\right]\sin^2\theta=\left[\sin(kr-\omega t)+\frac{\cos(kr-\omega t)}{kr}\right]\sin^2\theta=C$$



Σχήμα 1.5.1 Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου

Στην ιδανική περίπτωση θα μπορούσαμε να λύσουμε ως προς r αντί για θ. Επειδή αυτό δεν είναι δυνατό, προσπαθούμε να σκεφτούμε τις γραμμές ως ένα διάγραμμα σχηματικά, σε διαφορετικές στιγμές της σταθεράς C, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5.1. Τα διαγράμματα αναφέρονται σε τέσσερις χρονικές στιγμές t = 0, T/8, T/4, και 3T/8, όπου T είναι η περίοδος της ταλάντωσης, T = 2π/ω. Οι αποστάσεις x,z είναι αποστάσεις σε μονάδες του λ έως και 1,5λ. Το δίπολο εικονίζεται με μια μικτή γραμμή στην περιοχή προέλευσης. Ο κάτωθι κώδικας MATLAB εικονίζει την παραγωγή αυτών των ιχνών.

```
rmin=1/8; rmax=1.6;
Nr=61; Nth=61; N=6;
t=1/8; d=2*pi*t;

[r,th]=meshgrid(linspace(rmin,rmax,Nr), linspace(0,pi,Nth));
u=2*pi*r;
z=r.*cos(th); x=r.*sin(th);

C=(cos(u-d)./u+sin(u-d)) .*sin(th).^2;
contour([-x; x], [z; z], [C; C], N);
```

Παρατηρούμε τον τρόπο με τον οποίο οι γραμμές σχηματίζουν κλειστούς κύκλους με επίκεντρο το δίπολο. Οι κύκλοι τελικά απομακρύνονται από την γειτνιάζουσα περιοχή του δίπολου, ωθώντας τους μακριά αυτούς που προπορεύονται. Με τον τρόπο αυτό, το πεδίο ακτινοβολεί μακριά από την πηγή του. Το αρχείο MATLAB dipmovie.m παράγει μια ταινία της εξέλιξης των γραμμών του πεδίου για χρονική διάρκεια από t = 0 έως t = 8T.

1.6 Θεώρημα Εξασθένισης Ewald – Oseen.

Τα ανακλώμενα και εκπεμπόμενα πεδία ενός απλού κύματος σε ένα διηλεκτρικό μέσο αναλύθηκαν στα κεφάλαια 4 και 6, λύνοντας τις κυματικές εξισώσεις σε κάθε μέσο και για όλους τους περιορισμούς.

Αν και έχουμε φανερή την μαθηματική λύση, δεν έχουμε εξετάσει τη φυσική εξήγηση. Κάθε διηλεκτρικό αποτελείται από πολωμένα άτομα ή μόρια, τα οποία εκπέμπουν στο κενό, είτε λόγω του εσωτερικού τους πεδίου, είτε λόγω των πεδίων των άλλων ατόμων. Το ακτινοβολούμενο πεδίο πρέπει να συνδυαστεί με το εσωτερικό τους πεδίο, ώστε να παραχθεί το σωστό εκπεμπόμενο πεδίο. Αυτή είναι η ουσία του Θεωρήματος Εξασθένισης Ewald – Oseen. Η λέξη «εξασθένιση» αναφέρεται στην ακύρωση του εσωτερικού πεδίου του διηλεκτρικού μέσου.
Αν $E(\mathrm{r})$ είναι το εσωτερικό πεδίο, $E_{rad}(\mathrm{r})$ το συνολικό ακτινοβολούμενο πεδίο και $E'(\mathrm{r})$ το πεδίο που εκπέμπει το διηλεκτρικό, τότε, το Θεώρημα δηλώνει ότι, σε απόσταση r μέσα στο διηλεκτρικό μέσο ισχύει,

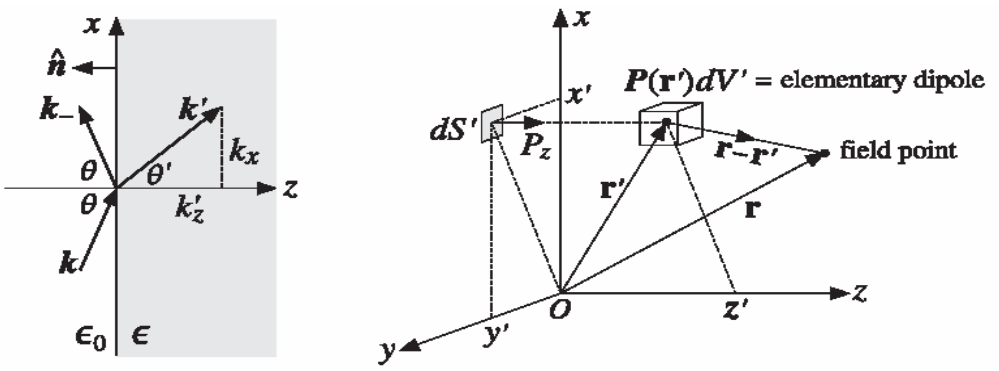
$$E_{rad}(\mathrm{r}) = E'(\mathrm{r}) - E(\mathrm{r}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E'(\mathrm{r}) = E(\mathrm{r}) + E_{rad}(\mathrm{r})} \tag{13.6.1}$$

Θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε το θεώρημα. Υποθέτουμε ότι το εσωτερικό πεδίο είναι ένα απλό ομοιόμορφο κύμα, με ΤΕ ή ΤΜ πολικότητα, κινείται σε διδιάστατο κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.6.1. Το εσωτερικό και εκπεμπόμενο πεδίο θα πάρουν τη μορφή,

$$E(\mathrm{r}) = E_0 e^{-jk\cdot\mathrm{r}}, \qquad E'(\mathrm{r}) = E'_0 e^{-jk'\cdot\mathrm{r}} \tag{1.6.2}$$

Η κυματική σταθερά του εσωτερικού πεδίου είναι $k = k_x \hat{z} + k_z \hat{z}$ με $r = |\mathrm{r}|$ και ικανοποιεί $k' = kn$. Για το εκπεμπόμενο κύμα, $k' = k_x \hat{z} + k'_z \hat{z}$ και ικανοποιεί $k' \cdot E'_0 = 0$ και $k' = \omega/c = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} = kn$, έτσι ώστε $c = c_0/n$, όπου n είναι η σταθερά διάθλασης του διηλεκτρικού μέσου, $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$.

Το συνολικό ακτινοβολούμενο πεδίο δίνεται από τη σχέση (1.3.10), όπου J είναι η ένταση του πεδίου λόγω της πολικότητας P, $J = \dot{P} = j\omega P$. Αν και δεν υπάρχει πυκνότητα φορτίου στην περιοχή του πεδίου, υφίσταται πυκνότητα στην επιφάνεια του διηλεκτρικού που ορίζεται ως $\rho_s = \hat{n}\cdot P$. Επειδή, $\hat{n} = -\hat{z}$, θα έχουμε $\rho_s = -\hat{z}\cdot P = -P_z$.



Σχήμα 1.6.1 Στοιχειώδες δίπολο στο r' συμβάλλει στο τοπικό πεδίο στο r.

Τέτοιου είδους πυκνότητα εμφανίζεται μόνο στην περίπτωση πόλωσης του κύματος TM. Έτσι, τα πεδία που παράγονται από αυτές τις πυκνότητες θα είναι,

$$E_{rad}(\mathrm{r}) = -j\omega\mu_0 \int_V J(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_S \rho_s(\mathrm{r}')\nabla' G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dS'$$

Όπου $G(\mathrm{r}) = e^{-jkr}/4\pi r$ είναι η συνάρτηση Green στο κενό με $k = \omega/c_0$, V είναι η δεξιά απόσταση για z ≥ 0 και S το εμβαδό στον άξονα xy. Αντικαθιστώντας τα J, ρ_s σε σχέση με την πολικότητα και γράφοντας $\nabla' G = -\nabla G$, και μετακινώντας το ∇ έξω από το ολοκλήρωμα επιφανείας, έχουμε,

$$E_{rad}(\mathrm{r}) = \omega^2\mu_0 \int_V P(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' + \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\int_S P_z(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dS' \qquad (1.6.3)$$

Υποθέτουμε ότι η πολικότητα $P(\mathrm{r}')$ επηρεάζεται από το πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό και θέτουμε $P(\mathrm{r}') = \varepsilon_0\chi E'(\mathrm{r}')$ όπου χ είναι η ηλεκτρική ευαισθησία. Θέτοντας $k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$, η εξίσωση (1.6.3) γίνεται,

$$E_{rad}(\mathrm{r}) = k^2\chi\int_V E'(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' + \chi\nabla\int_S E'_z(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dS' \qquad (1.6.4)$$

Για τα σημεία r αριστερά της επιφάνειας για z ≤ 0, $E_{rad}(\mathrm{r})$ θα παρήγαγε το ανακλώμενο πεδίο. Για τα σημεία στην περιοχή του διηλεκτρικού, για z ≥ 0, από την εξίσωση (1.6.1) θα έχουμε την αυτονόητη συνθήκη,

$$k^2\chi\int_V E'(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' + \chi\nabla\int_S E'_z(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dS' = E'(\mathrm{r}) - E(\mathrm{r}) \qquad (1.6.5)$$

Εισάγοντας την (1.6.2) έχουμε τη συνθήκη,

$$k^2\chi E'_0\int_V e^{-jk'\cdot\mathrm{r}'}G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' + \chi E'_{z0}\nabla\int_S e^{-jk'\cdot\mathrm{r}'}G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dS' = E'_0e^{-jk'\cdot\mathrm{r}} - E_0e^{-jk\cdot\mathrm{r}}$$

Για τη σταθερά $k' = k'_x\hat{x} + k'_z\hat{z}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $k'_x = k_x$, το οποίο είναι ισοδύναμο με τον νόμο του Snell. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό λόγω της ίδιας φάσης των

συντελεστών $e^{jk_x x}$ στην παραπάνω εξίσωση. Έπειτα, τα ολοκληρώματα με βάση τα S και V για z' = 0 και z ≥ 0 γίνονται,

$$\int_V e^{-jk'\cdot r'} G(r-r')dV' = \frac{e^{-jk'\cdot r}}{k'^2-k^2} - \frac{e^{-jk\cdot r}}{2k_z(k'_z-k_z)}$$

$$\int_S e^{-jk'\cdot r'} G(r-r')dS' = \frac{e^{-jk\cdot r}}{2jk_z} \quad \Rightarrow \quad \nabla\int_S e^{-jk'\cdot r'} G(r-r')dS' = -\frac{ke^{-jk\cdot r}}{2k_z} \tag{1.6.6}$$

Ορθολογικά έχουμε,

$$k^2\chi E'_0\left[\frac{e^{-jk'\cdot r}}{k'^2-k^2} - \frac{e^{-jk\cdot r}}{2k_z(k'_z-k_z)}\right] - \chi E'_{z0}\frac{ke^{-jk\cdot r}}{2k_z} = E'_0 e^{-jk'\cdot r} - E_0 e^{-jk\cdot r}$$

Εξισώνοντας τους εκθετικούς συντελεστές έχουμε τις δύο συνθήκες,

$$\frac{k^2\chi}{k'^2-k^2}E'_0 = E'_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k^2\chi}{k'^2-k^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k'^2 = k^2(1+\chi) = k^2n^2 \tag{1.6.7}$$

$$\frac{k^2\chi}{2k_z(k'_z-k_z)}E'_0 + \frac{\chi k}{2k_z}E'_{z0} = E_0 \tag{1.6.8}$$

Η πρώτη συνθήκη συνεπάγεται ότι $k' = kn$, όπου $n = \sqrt{1+\chi} = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$. Η ταχύτητα φάσης μέσα στο διηλεκτρικό είναι $c = c_0/n$. Αντικαθιστώντας $\chi = (k'^2-k^2)/k^2 = (k'^2_z-k^2_z)/k^2$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (1.6.8) ως εξής,

$$\frac{k'^2_z-k^2_z}{2k_z(k'_z-k_z)}E'_0 + \frac{(k'^2_z-k^2_z)k}{2k_zk^2}E'_{z0} = E_0 \quad \text{ή}$$

$$E'_0 + \frac{k}{k^2}(k'_z-k_z)E'_{z0} = \frac{2k_z}{k'_z+k_z}E_0 \tag{1.6.9}$$

Αυτό συνεπάγεται αυτόματα την εγκάρσια συνθήκη για το εκπεμπόμενο πεδίο, η οποία είναι $k'\cdot E'_0 = 0$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας $k\cdot E_0 = 0$ για το εσωτερικό πεδίο, έχουμε,

$$k\cdot E'_0 + \frac{k\cdot k}{k^2}(k'_z-k_z)E'_{z0} = \frac{2k_z}{k'_z+k_z}k\cdot E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad k\cdot E'_0 + (k'_z-k_z)E'_{z0} = 0$$

ή, ειδικά, $k_xE'_{x0} + k_zE'_{z0} + (k'_z-k_z)E'_{z0} = k_xE'_{x0} + k'_zE'_{z0} = k'\cdot E'_0 = 0$.

Αντικαθιστώντας $(k'_z-k_z)E'_{z0} = -k\cdot E'_0$ στην (1.6.9), και χρησιμοποιώντας τον κανόνα BAC-CAB, παίρνουμε,

$$E'_0 - \frac{k}{k^2}(k\cdot E'_0) = \frac{2k_z}{k'_z+k_z}E_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k\times(E'_0\times k)}{k^2} = \frac{2k_z}{k'_z+k_z}E_0 \tag{1.6.10}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (1.6.10) είναι ισοδύναμη με τα αποτελέσματα του συντελεστή εκπομπής και για τις δύο περιπτώσεις πολικότητας TM, TE. Το εκπεμπόμενο μαγνητικό πεδίο $H'(\mathrm{r}) = H'_0 e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}$ μπορεί να βρεθεί από τον νόμο του Faraday, $\nabla \times E' = -j\omega\mu_0 H'$, το οποίο δίνει $\omega\mu_0 H'_0 = k' \times E'_0$.

Έπειτα στρεφόμαστε στο ανακλώμενο πεδίο. Για τα σημεία r που βρίσκονται αριστερά της επιφάνειας (z ≤ 0), ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων (1.6.6) δίνει για z' = 0 και z ≤ 0,

$$\int_V e^{-jk'\cdot\mathrm{r}'} G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' = -\frac{e^{-jk_-\cdot\mathrm{r}}}{2k_z(k'_z+k_z)}$$

$$\int_S e^{-jk'\cdot\mathrm{r}'} G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dS' = \frac{e^{-jk_-\cdot\mathrm{r}}}{2jk_z} \quad \Rightarrow \quad \nabla\int_S e^{-jk'\cdot\mathrm{r}'} G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dS' = -\frac{k_- e^{-jk_-\cdot\mathrm{r}}}{2k_z}$$

Όπου k_- δηλώνει την σταθερά ανακλώμενου κύματος, $k_- = k_x \hat{x} - k_z \hat{z}$. Ακολουθεί ότι το συνολικά ανακλώμενο πεδίο θα είναι,

$$E_{rad}(\mathrm{r}) = k^2 \chi E'_0 \left[-\frac{e^{-jk_-\cdot\mathrm{r}}}{2k_z(k'_z+k_z)} \right] - \frac{k_- \chi E'_{z0}}{2k_z} e^{-jk_-\cdot\mathrm{r}} = E_{-0} e^{-jk_-\cdot\mathrm{r}}$$

Όπου ο συνολικός συντελεστής E_{-0} μπορεί να γραφεί,

$$E_{-0} = -\frac{k^2\chi}{2k_z(k'_z+k_z)} E'_0 - \frac{k_-\chi E'_{z0}}{2k_z} = \frac{k_z - k'_z}{2k_z}\left[E'_0 + \frac{k_-(k'_z+k_z)E'_{z0}}{k^2} \right]$$

Όπου θέτουμε $\chi = \left(k'^2_z - k_z^2\right)/k^2$. Σημειώνοντας την ταυτότητα $k_-\cdot E'_0 + (k'_z+k_z)E'_{z0} = k'\cdot E'_0 = 0$ και $k_-\cdot k_- = k^2$, τελικά έχουμε,

$$E_{-0} = \frac{k_z - k'_z}{2k_z}\left[E'_0 - \frac{k_-(k_-\cdot E'_0)}{k^2} \right] \quad \Rightarrow \quad \frac{k_-\times(E'_0\times k_-)}{k^2} = \frac{2k_z}{k_z - k'_z} E_{-0} \qquad (1.6.11)$$

Οι συμβατικοί περιορισμοί είναι μια συνέπεια αυτής της προσέγγισης. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις (1.6.10) και (1.6.11) ορίζουν τη συνέχεια των εφαπτομενικών συντελεστών του πεδίου E. Πράγματι, προσθέτοντας έχουμε,

$$E_0 + E_{-0} = E'_0 + \frac{\chi E'_{z0}}{2k_z}(k - k_-) = E'_0 + \chi \hat{z} E'_{z0}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\hat{z}\times(E_0 + E_{-0}) = \hat{z}\times E'_0$.

Συνοψίζοντας, τα ακτινοβολούντα πεδία των πολωμένων ατόμων μπορούν να προκαλέσουν την ακύρωση του εσωτερικού πεδίου κατά μήκος του διηλεκτρικού, και συνεργάζονται για να δημιουργήσουν το συνολικό εκπεμπόμενο πεδίο με ταχύτητα φάσης $c = c_0/n$. Το ανακλώμενο κύμα δεν εντοπίζεται μόνο στην επιφάνεια αλλά είναι και το πεδίο που ανακλάται από τα άτομα σε όλο το σώμα του διηλεκτρικού.

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε μια άλλη απλοποιημένη προσέγγιση με βάση τα ακτινοβολούντα δίπολα. Έχει ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα, το οποίο οδηγεί στις σχέσεις Lorentz – Lorenz ή Claussius – Mossotti μεταξύ του πίνακα ανάκλασης και της ικανότητας πολώσεως. Το διηλεκτρικό παρουσιάζεται σαν μια συλλογή δίπολων $\mathbf{p}_i$ στα σημεία $\boldsymbol{r}_i$. Τα σημεία του δίπολου υποθέτουμε ότι δημιουργούνται από ένα τοπικό (ή επιδρούν) ηλεκτρικό πεδίο $E_{loc}(\mathrm{r})$ διαμέσου της επιφάνειας του δίπολου $p_i = \alpha\varepsilon_0 E_{loc}(\mathrm{r}_i)$, όπου α η ικανότητα πόλωσης. Το πεδίο που ακτινοβολείται από την επιφάνεια p_i του δίπολου δίνεται από την εξίσωση (1.5.4), όπου G(r) είναι η σταθερά Green στο κενό,

$$E_j(\mathrm{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\nabla\times\left[p_j G(\mathrm{r}-\mathrm{r}_j)\right]$$

Το πεδίο στην τοποθεσία του *i* δίπολου ως προς όλα τα άλλα δίπολα θα είναι,

$$E_{rad}(\mathrm{r}_i) = \sum_{j+i} E_j(\mathrm{r}_i) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{j+i}\nabla_i\times\nabla_i\times\left[p_j G(\mathrm{r}_i-\mathrm{r}_j)\right] \qquad (1.6.12)$$

Όπου ∇_i είναι ανάλογο του r_i. Αναφερόμενοι σε μια συνεχόμενη περιγραφή, υποθέτουμε ότι έχουμε N δίπολα ανά μονάδα χώρου, έτσι ώστε η πυκνότητα πόλωσης να είναι $P(\mathrm{r}') = Np(\mathrm{r}') = N\alpha\varepsilon_0 E_{loc}(\mathrm{r}')$. Έπειτα η εξίσωση (1.6.12) μπορεί να αντικατασταθεί από το ολοκλήρωμα,

$$E_{rad}(\mathrm{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\left[\nabla\times\nabla\times\left[P(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\right]\right]_{\mathrm{r}'\neq\mathrm{r}}dV' \qquad (1.6.13)$$

ή

$$E_{rad}(\mathrm{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\nabla\times\int_V P(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' - \frac{2}{3\varepsilon_0}P(\mathrm{r}) \qquad (1.6.14)$$

Και στην περίπτωση του τοπικού φορτίου (όπου $N\alpha$ είναι αδιάστατο),

$$E_{rad}(\mathrm{r}) = N\alpha\nabla\times\nabla\times\int_V E_{loc}(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' - \frac{2}{3}N\alpha E_{loc}(\mathrm{r}) \qquad (1.6.15)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα εξασθένισης του Ewald – Oseen, το εσωτερικό πεδίο $E(\mathrm{r})$ πρέπει να ακυρωθεί, δημιουργώντας το τοπικό πεδίο $E_{loc}(\mathrm{r})$ το οποίο είναι $E_{rad}(\mathrm{r}) = E_{loc}(\mathrm{r}) - E(\mathrm{r})$. Αυτονόητα έχουμε,

$$N\alpha\nabla\times\nabla\times\int_V E_{loc}(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' - \frac{2}{3}N\alpha E_{loc}(\mathrm{r}) = E_{loc}(\mathrm{r}) - E(\mathrm{r}) \qquad (1.6.16)$$

Υποθέτοντας μία λύση απλού κύματος $E_{loc}(\mathrm{r}) = E_1' e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}$, παίρνουμε,

$$N\alpha\nabla\times\nabla\times E_1'\int_V e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV'-\frac{2}{3}N\alpha E_1'e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}=E_1'e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}-E_0e^{-jk\cdot\mathrm{r}}$$

Για r μέσα στο διηλεκτρικό , έχουμε,

$$N\alpha\nabla\times\nabla\times E_1'\left[\frac{e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}}{k'^2-k^2}-\frac{e^{-jk\cdot\mathrm{r}}}{2k_z(k_z'-k_z)}\right]-\frac{2}{3}N\alpha E_1'e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}=E_1'e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}-E_0e^{-jk\cdot\mathrm{r}}$$

$$N\alpha\nabla\times\nabla\times E_1'\left[\frac{e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}}{k'^2-k^2}-\frac{e^{-jk\cdot\mathrm{r}}}{2k_z(k_z'-k_z)}\right]=\left(1+\frac{2}{3}N\alpha\right)E_1'e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}-E_0e^{-jk\cdot\mathrm{r}}$$

Κάνοντας τις ∇ ενέργειες, έχουμε,

$$N\alpha\left[\frac{k'\times(E_1'\times k')}{k'^2-k^2}e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}-\frac{k\times(E_1'\times k)}{2k_z(k_z'-k_z)}e^{-jk\cdot\mathrm{r}}\right]=\left(1+\frac{2}{3}N\alpha\right)E_1'e^{-jk'\cdot\mathrm{r}}-E_0e^{-jk\cdot\mathrm{r}}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των εκθετών έχουμε δύο συνθήκες,

$$N\alpha\frac{k'\times(E_1'\times k')}{k'^2-k^2}=\left(1+\frac{2}{3}N\alpha\right)E_1' \tag{1.6.17}$$

$$N\alpha\frac{k\times(E_1'\times k)}{2k_z(k_z'-k_z)}=E_0 \tag{1.6.18}$$

Από την πρώτη συνθήκη συνεπάγεται ότι $k'\cdot E_1'=0$ οπότε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα BAC-CAB έχουμε,

$$\frac{N\alpha k'^2}{k'^2-k^2}E_1'=\left(1+\frac{2}{3}N\alpha\right)E_1' \quad\Rightarrow\quad \frac{N\alpha k'^2}{k'^2-k^2}=1+\frac{2}{3}N\alpha \tag{1.6.19}$$

Θέτοντας $k'=kn$, η εξίσωση (13.6.19) συνεπάγεται τη φόρμουλα Lorentz – Lorenz,

$$\frac{N\alpha n^2}{n^2-1}=1+\frac{2}{3}Na \quad\Rightarrow\quad \frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{1}{3}N\alpha \tag{1.6.20}$$

Πρέπει να διαχωρίσουμε το τοπικό πεδίο $E_{loc}(\mathrm{r})$ με το μετρούμενο ή παρατηρούμενο πεδίο $E'(\mathrm{r})$, καθώς το δεύτερο συγκαλύπτει το πρώτο. Για να βρούμε την σχέση τους, ορίζουμε την ευαισθησία με $\chi=n^2-1$ και απαιτούμε η πολικότητα $P(\mathrm{r})$ να σχετίζεται με το παρατηρούμενο πεδίο με τη σχέση $P=\varepsilon_0\chi E'$. Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα Lorentz – Lorenz και $P=N\alpha\varepsilon_0E_{loc}$ βρίσκουμε τη γνωστή σχέση,

$$\boxed{E_{loc}=E'+\frac{P}{3\varepsilon_0}} \tag{1.6.21}$$

Από $N\alpha E_{loc} = P/\varepsilon_0 = \chi E'$, έχουμε $N\alpha E_1' = \chi E_0'$. Τότε, η δεύτερη συνθήκη (13.6.18) μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση του E_0',

$$\frac{\chi k \times (E_0' \times k)}{2k_z(k_z' - k_z)} = E_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k \times (E_0' \times k)}{k^2} = \frac{2k_z}{k_z' + k_z} E_0 \tag{1.6.22}$$

Η οποία είναι πανομοιότυπη με την (1.6.10). Έτσι, η λύση της $E'(\mathrm{r})$ είναι όμοια με αυτή που βρήκαμε πιο πριν.

Τελικά, έχουμε το ανακλώμενο πεδίο υπολογίζοντας την εξίσωση (1.6.13) στα σημεία r αριστερά της επιφάνειας του δίπολου. Στην περίπτωση αυτή, δεν υπάρχει $2P/3\varepsilon_0$ στην (1.6.14) και έχουμε,

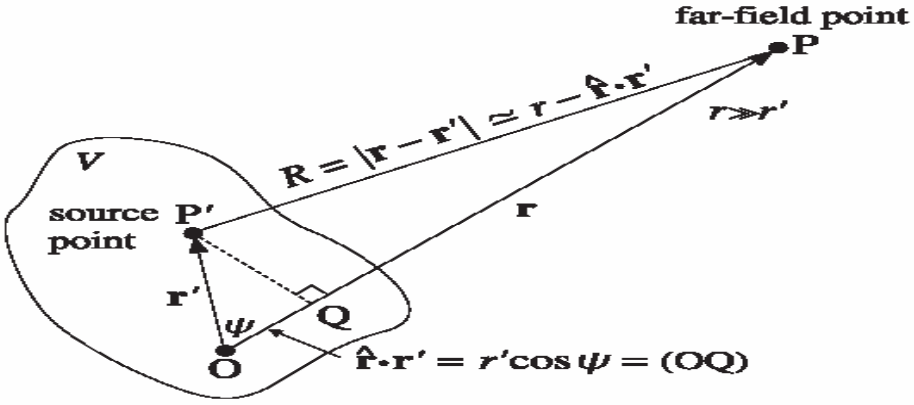
$$\begin{aligned} E_{rad}(\mathrm{r}) &= N\alpha \nabla \times \nabla \times \int_V E_{loc}(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' = \chi \nabla \times \nabla \times \int_V E'(\mathrm{r}')G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' \\ &= \chi \nabla \times \nabla \times E_0' \int_V e^{-jk'\cdot \mathrm{r}} G(\mathrm{r}-\mathrm{r}')dV' = \chi \nabla \times \nabla \times E_0' \left[-\frac{e^{-jk_-\cdot \mathrm{r}}}{2k(k_z' + k_z)} \right] \\ &= -\frac{\chi k_- \times (E' \times k_-)}{2k_z(k_z' + k_z)} e^{-jk_-\cdot \mathrm{r}} = \frac{k_z - k_z'}{2k_z} \frac{k_- \times (E_0' \times k_-)}{k^2} e^{-jk_-\cdot \mathrm{r}} = E_{-0} e^{-jk_-\cdot \mathrm{r}} \end{aligned}$$

η οποία συμφωνεί με την (1.6.11).

1.7 Πεδία Ακτινοβολίας.

Οι καθυστερημένες λύσεις (1.3.3), για τα δυναμικά είναι πολύ γενικές και εφαρμόζονται σε κάθε ένταση και διασπορά φορτίου. Εδώ θα αρχίσουμε να κάνουμε μια σειρά προσεγγίσεων, σχετικών με προβλήματα ακτινοβολίας. Ενδιαφερόμαστε για πεδία που ακτινοβολούν μακριά από τις πηγές τους και είναι ικανά να μεταφέρουν ενέργεια σε μεγάλες αποστάσεις.

Η προσέγγιση μακρινού πεδίου υποθέτει ότι το σημείο r του πεδίου είναι μακριά από την πηγή. Η λέξη «μακριά» σημαίνει πιο μακριά από την τυπική χωροταξική επέκταση της διασποράς του φορτίου, δηλαδή, $r >> r'$. Επειδή το r' μεταβάλλεται μόνο κοντά στην πηγή έντασης, έχουμε ότι $r >> l$, όπου l είναι η τυπική απόσταση της διασποράς του φορτίου (για παράδειγμα, σε μια γραμμική κεραία, l είναι το μήκος της). Η προσέγγιση αυτή φαίνεται στο σχήμα 1.7.1.



Σχήμα 1.7.1 Προσέγγιση μακρινού πεδίου

Όπως φαίνεται στο σχήμα, σε μακρινές αποστάσεις, οι πλευρές PP' και PQ του τριγώνου PQP' είναι σχεδόν ίσες. Αλλά η πλευρά PQ είναι η διαφορά OP – OQ. Έτσι, $R \cong r - \hat{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{r}' = r - r'\cos\psi$, όπου ψ είναι η γωνία μεταξύ των ακτινών r και r'.

Μπορούμε να έχουμε μια καλύτερη προσέγγιση με τη βοήθεια της σειράς επεκτάσεων small-x του Taylor $\sqrt{1+x} \cong 1 + x/2 - x^2/8$. Επεκτείνοντας το R σε δυνάμεις του r'/r έως και δευτέρου βαθμού, έχουμε,

$$R = |\mathrm{r} - \mathrm{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr'\cos\psi + r'^2} = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\psi + \frac{r'^2}{r^2}}$$

$$\cong r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\psi + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{1}{8}\left(-2\frac{r'}{r}\cos\psi + \frac{r'^2}{r^2}\right)^2\right)$$

$$\cong r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\psi + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{r'^2}{2r^2}\cos^2\psi\right)$$

Ή συνδυάζοντας τους δύο τελευταίους όρους,

$$R = r - r'\cos\psi + \frac{r'^2}{2r}\sin^2\psi, \qquad \text{για} \quad r >> r' \tag{1.7.2}$$

Έτσι, η προσέγγιση πρώτου βαθμού είναι $R = r - r'\cos\psi = r - \hat{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{r}'$. Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση στα ολοκληρώματα των εξισώσεων (1.3.1), έχουμε,

$$\varphi(\mathrm{r}) \cong \int_V \frac{\rho(\mathrm{r}')e^{-jk\left(r - \hat{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{r}'\right)}}{4\pi\varepsilon\left(r - \mathrm{r}\cdot\hat{\mathrm{r}}'\right)} d^3\mathrm{r}'$$

Αντικαθιστώντας $R = r - \hat{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{r}' \cong r$, στον παρονομαστή, αλλά όχι στον εκθέτη, έχουμε τη λύση στην προσέγγιση μακρινού πεδίου,

$$\varphi(\mathrm{r}) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi\varepsilon r}\int_V \rho(\mathrm{r}')e^{jk\,\hat{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{r}'} d^3\mathrm{r}'$$

Επειδή το R προσεγγίζεται διαφορετικά στον παρονομαστή από ότι στον εκθέτη, μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι η προσέγγιση δεν είναι έγκυρη. Πραγματικά, σε διαφορετικές περιπτώσεις, δεν είναι σωστό να αγνοήσουμε τον όρο $\hat{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{r}'$ από τον παρονομαστή. Εντούτοις, η διαδικασία είναι σωστή για προβλήματα ακτινοβολούντων πεδίων και παράγει τους κατάλληλους όρους που αντιπροσωπεύουν τα διαδιδόμενα κύματα.

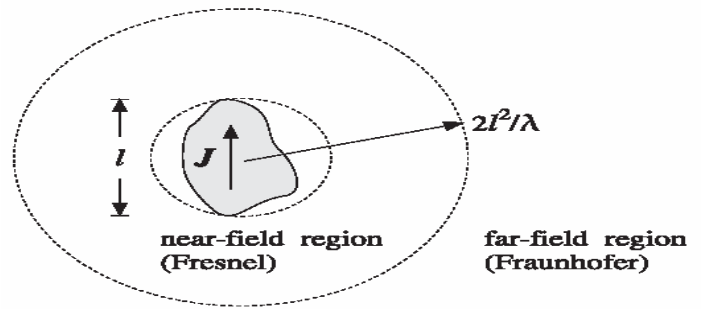
Όμως, έχουμε και την περίπτωση της προσέγγισης δεύτερου βαθμού. Τους όρους δεύτερης τάξης τους έχουμε απαλείψει και από τον εκθέτη και από τον παρονομαστή. Επειδή στον εκθέτη πολλαπλασιάζονται με το κ, για να δικαιολογήσουμε την απαλοιφή τους, πρέπει να απαιτήσουμε σε συνδυασμό με την $r >> r'$ ότι ισχύει $kr'^2/r << 1$, ή σε συνάρτηση με το μήκος

κύματος, να ισχύει $r >> 2\pi r'^2/\lambda$. Αντικαθιστώντας το $2r'$ με το τυπικό μέγεθος l της πηγής έντασης, έχουμε $r >> \pi l^2/2\lambda$. Αντικαθιστώντας $r >> 2l^2/\lambda$ μπορούμε να θέσουμε τις συνθήκες για το μακρινό πεδίο ως εξής,

$$r >> l \quad \text{και} \quad r >> \frac{2l^2}{\lambda} \tag{1.7.3}$$

Αυτές οι συνθήκες ορίζουν την περιβόητη περιοχή ακτινοβολίας μακρινού πεδίου ή Fraunhofer. Αυτές ικανοποιούνται εύκολα από πολλές κεραίες (όπως το δίπολο ημίσιου κύματος), επειδή το l είναι της ίδιας διάστασης με το λ, ώστε η δεύτερη συνθήκη είναι όμοια με την πρώτη. Αυτό συμβαίνει επίσης, όταν $l > \lambda$. Όταν $l << \lambda$ η πρώτη συνθήκη συνεπάγεται τη δεύτερη.

Η απόσταση $r = 2l^2/\lambda$ είναι η διαχωριστική γραμμή μεταξύ της περιοχής του μακρινού πεδίου και αυτής του κοντινού πεδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7.2. Η περιοχή μακρινού πεδίου χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι η γωνιακή διασπορά της ακτινοβολίας εξαρτάται από την απόσταση r.



Σχήμα 1.7.2 Ζώνες ακτινοβολίας μακρινού και κοντινού πεδίου

Μπορούμε, όμως, να απαλείψουμε και τον όρο $k\hat{\mathrm{r}}\cdot\mathrm{r}'$ από τον εκθέτη; Αυτό θα απαιτούσε $kr' << 1$ ή ότι $r' << \lambda$. Έτσι, μπορεί να παραβλεφθεί στις ηλεκτρικά μικρές κεραίες , όπου $l << \lambda$ ή, ισοδύναμα, σε μεγάλα μήκη κύματος ή χαμηλές συχνότητες. Το ερτζιανό δίπολο είναι ένα παράδειγμα τέτοιας κεραίας.

Ορίζοντας τη σταθερά κύματος κ να είναι στη διεύθυνση του πεδίου r , και ισχύει $k = k\hat{\mathrm{r}}$, τότε μπορούμε να συνοψίσουμε την προσέγγιση υπολογισμού μακρινού πεδίου στα καθυστερημένα μονής συχνότητας δυναμικά ως ακολούθως,

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\mathrm{r}) &= \frac{e^{-jkr}}{4\pi\varepsilon r}\int_V \rho(\mathrm{r}')e^{jk\cdot\mathrm{r}'}d^3\mathrm{r}' \\ A(\mathrm{r}) &= \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}\int_V J(\mathrm{r}')e^{jk\cdot\mathrm{r}'}d^3\mathrm{r}'\end{aligned}} \qquad \boxed{k = k\hat{\mathrm{r}}} \tag{1.7.4}$$

Στις εκφράσεις αυτές, η ακτινωτή εξάρτηση στο r είναι διαφορετική από την γωνιακή εξάρτηση (θ,φ), η οποία δίνεται από τους παράγοντες των ολοκληρωμάτων. Αφού οι παράγοντες αυτοί παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των κατευθυντικών ιδιοτήτων των ακτινοβολούμενων πεδίων, θα τους παρουσιάσουμε με τις σχέσεις,

$$Q(k) = \int_V \rho(\mathrm{r}')e^{jk\cdot\mathrm{r}'}d^3\mathrm{r}' \tag{1.7.5}$$

$$F(k)=\int_V J(\mathrm{r}')e^{jk\cdot\mathrm{r}'}d^3\mathrm{r}'$$

Ο πρώτος καλείται παράγοντας αλλαγής σχήματος και ο δεύτερος σταθερά ακτινοβολίας. Αναγνωρίζονται να είναι οι τρισδιάστατοι μετασχηματισμοί Fourier για τις πυκνότητες έντασης και φορτίου. Οι ποσότητες αυτές εξαρτώνται από το ω ή το κ και την κατευθυντική μονάδα $\hat{\mathrm{r}}$ η οποία ορίζεται ολοκληρωτικά από τις γωνίες σφαιρικών συντεταγμένων θ, φ. Οπότε, όταν χρειάζεται, θα επιδεικνύουμε μόνο τη γωνιακή εξάρτηση των ποσοτήτων αυτών γράφοντάς αυτές ως Q(θ, φ), F(θ, φ). Κατά τη νέα αυτή θεώρηση, τα ακτινοβολούντα δυναμικά μακρινού πεδίου γίνονται,

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\mathrm{r})&=\frac{e^{-jkr}}{4\pi\varepsilon r}Q(\theta,\phi)\\ A(\mathrm{r})&=\frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}F(\theta,\phi)\end{aligned}} \qquad (1.7.6)$$

1.8 Ακτινικές Συντεταγμένες.

Οι λύσεις μακρινού πεδίου των εξισώσεων του Maxwell τα κατευθυντικά σχέδια των συστημάτων κεραιών, περιγράφονται καλύτερα με τις σφαιρικές συντεταγμένες.

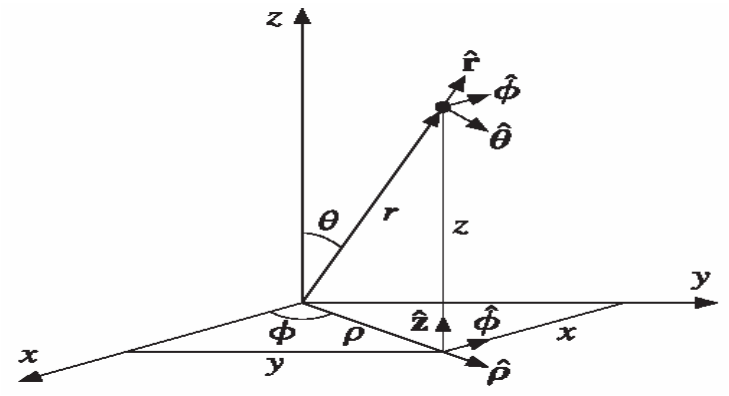
Οι ορισμοί των καρτεσιανών, κυλινδρικών και σφαιρικών συστημάτων συντεταγμένων, φαίνονται στο σχήμα 1.8.1. Οι συντεταγμένες που αναπαριστούν την ακτίνα r είναι αντίστοιχα, (x, y, z), (ρ, φ, z) και (r, θ, φ) και ορίζουν τις προβολές στις αντίστοιχες διευθύνσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Οι σχέσεις μεταξύ των συστημάτων συντεταγμένων μπορούν να αποκομιστούν ανά σύστημα αξόνων xy και ρz όπως φαίνεται στο σχήμα 1.8.2. Οι σχέσεις μεταξύ των καρτεσιανών και των κυλινδρικών συντεταγμένων είναι,

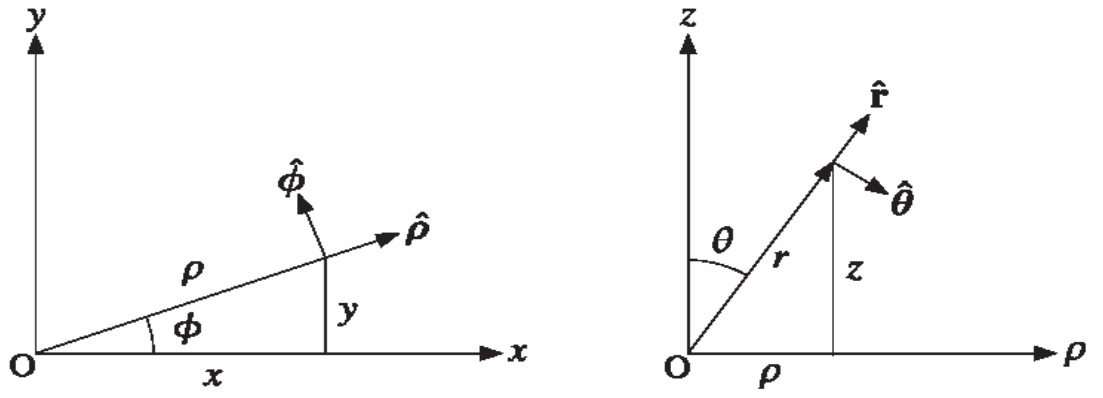
$$\boxed{\begin{aligned}x&=\rho\cos\phi\\ y&=\rho\sin\phi\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\hat{\rho}&=\hat{x}\cos\phi+\hat{y}\sin\phi\\ \hat{\phi}&=-\hat{x}\sin\phi+\hat{y}\cos\phi\end{aligned}} \qquad (1.8.1)$$

Όμοια, οι σχέσεις μεταξύ των κυλινδρικών και σφαιρικών συντεταγμένων είναι,

$$\boxed{\begin{aligned}\rho&=r\sin\theta\\ z&=r\cos\theta\end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned}\hat{\mathrm{r}}&=\hat{z}\cos\theta+\hat{\rho}\sin\theta\\ \hat{\theta}&=-\hat{z}\sin\theta+\hat{\rho}\cos\theta\end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned}\hat{z}&=\hat{\mathrm{r}}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta\\ \hat{\rho}&=\hat{\mathrm{r}}\sin\theta+\hat{\theta}\cos\theta\end{aligned}} \qquad (1.8.2)$$



Σχήμα 1.8.1 Καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.



Σχήμα 1.8.2

Οι σχέσεις μεταξύ καρτεσιανών και σφαιρικών συντεταγμένων βγαίνουν από την (1.8.2) αντικαθιστώντας ρ με $\hat{\rho}$ από την (1.8.1), για παράδειγμα,

$$x = \rho\cos\phi = (r\sin\theta)\cos\phi = r\sin\theta\cos\phi$$
$$\hat{\mathrm{r}} = \hat{\rho}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta = \left(\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi\right)\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$$

Οι τελικές σχέσεις είναι,

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{r}} &= \hat{x}\cos\phi\sin\theta + \hat{y}\sin\phi\sin\theta + \hat{z}\cos\theta \\ \hat{\theta} &= \hat{x}\cos\phi\cos\theta + \hat{y}\sin\phi\cos\theta - \hat{z}\sin\theta \\ \hat{\phi} &= -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi \end{aligned}$$

(1.8.3)

Σημειώνουμε ξανά ότι η ακτίνα $\hat{\mathrm{r}}$ καθορίζεται από τις πολικές και αζιμουθιακές γωνίες θ, φ. Το απειροελάχιστο μήκος σε κάθε ακτίνα σφαιρικά, δίνεται από,

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = rd\theta, \quad dl_\phi = r\sin\theta d\phi \tag{1.8.4}$$

Το ανάδελτα σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι,

$$\nabla = \hat{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial l_r} + \hat{\theta}\frac{\partial}{\partial l_\theta} + \hat{\phi}\frac{\partial}{\partial l_\phi} = \hat{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{1.8.5}$$

Τα μήκη dl_θ και dl_ϕ ανταποκρίνονται στις απειροελάχιστες μετακινήσεις κατά θ και φ γωνία, στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας r, όπως φαίνεται στο σχήμα 13.8.3. Τα στοιχεία της επιφάνειας $dS = \hat{\mathrm{r}}\, dS$ στη σφαίρα ορίζονται ως $dS = dl_\theta dl_\phi$, ή,

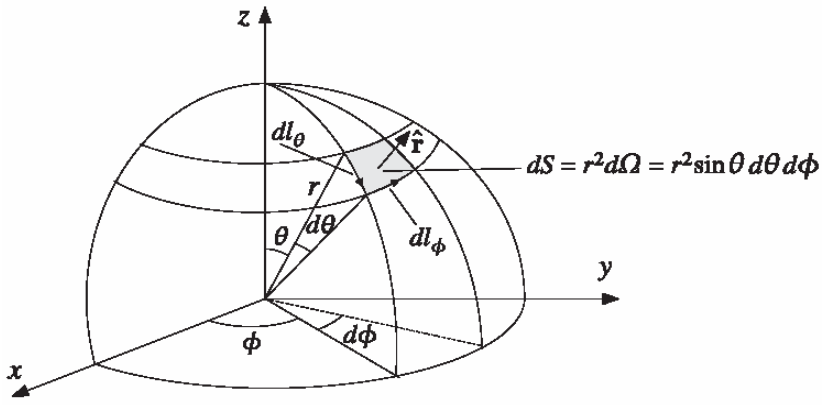
$$dr^2 \sin\theta d\theta d\phi \tag{13.8.6}$$

Η αντίστοιχη απειροελάχιστη κυλινδρική γωνία $d\Omega$ οριζόμενη από τον κώνο $d\theta$, $d\varphi$ είναι,

$$dS = r^2 d\Omega \quad \Rightarrow \quad d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi \tag{1.8.7}$$

Η κυλινδρική γωνία οριζόμενη από την ολική σφαίρα είναι σε μονάδες στερακτινίων,

$$\Omega_{sphere} = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$$



Σχήμα 1.8.3 Κυλινδρική γωνία ορισμένη από τις γωνίες θ,φ.

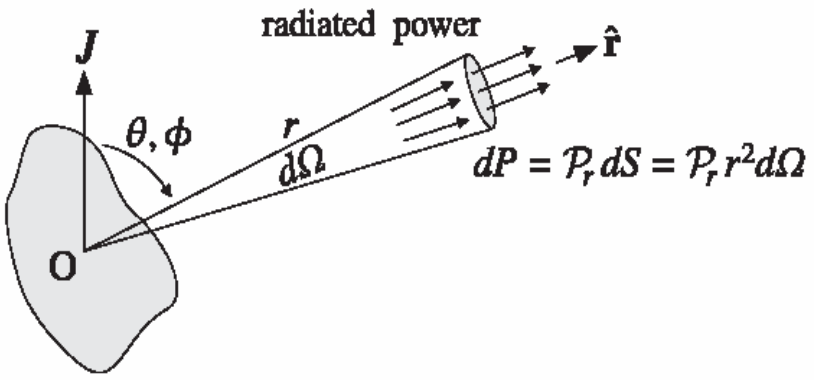
1.9 <u>Προσέγγιση ακτινοβολούντος πεδίου.</u>

Αναζητώντας την προέλευση των εντάσεων του πεδίου E και H από τα δυναμικά μακρινού πεδίου (1.7.6), πρέπει να κάνουμε μια τελική προσέγγιση και να κρατήσουμε μόνο τους όρους που εξαρτώνται από το r, όπως το *1/r*, και να αγνοήσουμε τους όρους που μειώνονται γρηγορότερα, όπως το $1/r^2$. Θα αναφερόμαστε στα πεδία με εξάρτηση 1/r ως ακτινοβολούντα πεδία.

Η δικαιολογία αυτής της προσέγγισης φαίνεται στο σχήμα 1.9.1. Η ισχύς που ακτινοβολείται μέσα σε μια κυλινδρική γωνία dΩ θα διαχυθεί μέσω της επιφάνειας dS και θα

δίνεται από τη σχέση $dP = P_r dS$, όπου P_r ο ακτινικός συντελεστής του διανύσματος. Αντικαθιστώντας το dS σε συνάρτηση με τη γωνία και το P_r σε συνάρτηση με το τετράγωνο του ηλεκτρικού πεδίου, έχουμε,

$$dP = P_r dS = \left(\frac{1}{2\eta}E^2\right)\left(r^2 d\Omega\right)$$



Σχήμα 1.8.3 Ισχύς ακτινοβολούμενη στην κυλινδρική γωνία $d\Omega$.

Έτσι, εάν η ποσότητα της ισχύος στην περιοχή της γωνίας dΩ πρόκειται να διαδοθεί χωρίς ενίσχυση, σε απόσταση r, τότε το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι $E^2 r^2 \sim$σταθερό ή $E \sim 1/r$. Όμοια, $H \sim 1/r$. Οποιοσδήποτε όρος στα Ε, Η που ελαττώνεται πιο γρήγορα από το $1/r$, ως προς r, δεν θα έχει τη δυνατότητα να μεταφέρει την ισχύ σε μεγάλες αποστάσεις από τις πηγές εντάσεών του.

1.10 Υπολογίζοντας τα Ακτινοβολούντα Πεδία.

Σε μακρινές αποστάσεις από την περιοχή της έντασης J, τα ακτινοβολούντα πεδία μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις (1.3.9) το δυναμικό ακτινοβολίας Α από την εξίσωση (1.7.6). Για τον υπολογισμό της κύρτωσης του Α μπορούμε να αγνοήσουμε κάθε όρο που ελαττώνεται ταχύτερα από το $1/r$, ως προς r,

$$\nabla \times A = \nabla \times \left(\frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}F\right) = \left(\hat{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \gamma\omega\nu\iota\alpha\kappa\acute{\eta}\,\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\gamma\omega\varsigma\right) \times \left(\frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}F\right)$$

$$= -jk\left(\hat{\mathrm{r}} \times F\right)\left(\frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) = -jk \times A + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Οι γωνιακές παράγωγοι βγαίνουν από τις παραγώγους των θ, φ, στο ανάδελτα της εξίσωσης (1.8.5). Οι παράγωγοι αυτοί επιδρούν στην F(θ, φ) αλλά επειδή περιέχουν ήδη τον παράγοντα $1/r$ και το υπόλοιπο του Α έχει ακόμα έναν παράγοντα $1/r$, θα έχουμε τελικά εξάρτηση της τάξης $1/r^2$.

Έτσι, φθάνουμε στον χρήσιμο κανόνα ότι, για να παραμείνουμε στην εξάρτηση του $1/r$, το ανάδελτα, όπου ενεργεί σε συνάρτηση της μορφής $f(\theta,\phi)e^{-jkr}/r$, μπορεί να αντικατασταθεί από

$$\boxed{\nabla \to -jk = -jk\hat{\mathrm{r}}} \qquad (1.10.1)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα ξανά, έχουμε,

$$\nabla\times(\nabla\times A)=-jk\times(-jk\times A)=(k\times A)\times k=k^2\left(\hat{\mathrm{r}}\times A\right)\times\hat{\mathrm{r}}=\omega^2\mu\varepsilon\left(\hat{\mathrm{r}}\times A\right)\times\hat{\mathrm{r}}$$

Σημειώνοντας ότι $\omega\mu=ck\mu=k\sqrt{\mu/\varepsilon}=k\eta$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.3.9), τελικά βρίσκουμε,

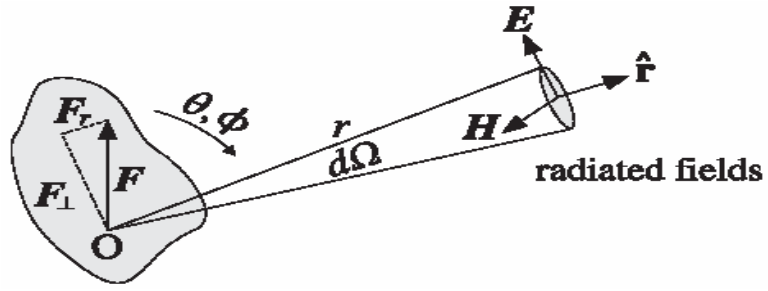
$$\boxed{\begin{aligned}E&=-jk\eta\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\left(\hat{\mathrm{r}}\times F\right)\times\hat{\mathrm{r}}\\H&=-jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\hat{\mathrm{r}}\times F\end{aligned}} \qquad (1.10.2)$$

Ακόμη, αναγνωρίζουμε ότι,

$$E=\eta H\times\hat{\mathrm{r}},\quad H=\frac{1}{\eta}\hat{\mathrm{r}}\times E \quad \text{και} \quad \frac{|E|}{|H|}=\eta \qquad (1.10.3)$$

Σημειώνουμε την ομοιότητα μεταξύ απλών ομοιόμορφων κυμάτων και τονίζουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Τα $\left\{E,H,\hat{\mathrm{r}}\right\}$ ικανοποιούν τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.
2. Το E είναι πάντα παράλληλο στην κάθετη προβολή $F_\perp$ του συντελεστού ακτινοβολίας F.
3. Το Η είναι πάντα κάθετο στον συντελεστή ακτινοβολίας F.
4. Οι πηγές dc εντάσεων ($\omega=k=0$) δεν ακτινοβολούν.



Σχήμα 1.10.1 Ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ακτινοβολούμενα από πηγή έντασης.

Το σχήμα 1.10.1. παρουσιάζει κάποιες από αυτές τις ιδιότητες. Ο συντελεστής ακτινοβολίας μπορεί να διασπαστεί γενικά σε ένα ακτινωτό τμήμα $F_r=\hat{\mathrm{r}}F_r$ και στο κάθετο τμήμα $F_\perp$. Πράγματι, αυτή η διάσπαση αποκομίζεται από την ταυτότητα,

$$F = \hat{\mathrm{r}}\left(\hat{\mathrm{r}}\cdot F\right) + \left(\hat{\mathrm{r}}\times F\right)\times\hat{\mathrm{r}} = \hat{\mathrm{r}}F_r + F_\perp$$

Αναλύοντας το F κατά τις σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε,

$$F = \hat{\mathrm{r}}F_r + \hat{\theta}F_\theta + \hat{\phi}F_\phi$$

$$\hat{\mathrm{r}}\times F = \hat{\phi}F_\theta - \hat{\theta}F_\phi$$

$$F_\perp = \left(\hat{\mathrm{r}}\times F\right)\times\hat{\mathrm{r}} = \hat{\theta}F_\theta + \hat{\phi}F_\phi$$

Έτσι, μόνο οι F_θ και F_φ συνεισφέρουν στα πεδία,

$$\boxed{\begin{aligned} E &= -jk\eta\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\left[\hat{\theta}F_\theta + \hat{\phi}F_\phi\right] \\ H &= -jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\left[\hat{\phi}F_\theta - \hat{\theta}F_\phi\right] \end{aligned}} \qquad (1.10.4)$$

Αναγνωρίζοντας ότι $\hat{\mathrm{r}}\times F = \hat{\mathrm{r}}\times F_\perp$ μπορούμε να γράψουμε εν συντομία,

$$\boxed{\begin{aligned} E &= -jk\eta\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}F_\perp \\ H &= -jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\hat{\mathrm{r}}\times F_\perp \end{aligned}} \qquad (1.10.5)$$

Γενικά, ο συντελεστής ακτινοβολίας θα έχει και τις δύο F_θ και F_φ μαζί, σε συνάρτηση με τη φύση της έντασης διασποράς J. Εντούτοις, στην πράξη υπάρχουν τρεις σημαντικές εξαιρέσεις :

1. Όταν υπάρχει μόνο η F_θ. Αυτή η περίπτωση περιλαμβάνει όλες τις γραμμικές κεραίες και κάτοπτρα. Ο άξονας z ορίζεται κατά μήκος της κεραίας, έτσι ώστε ο συντελεστής ακτινοβολίας να αποτελείται μόνο από r και θ.
2. Όταν υπάρχει μόνο η F_φ. Αυτή περιλαμβάνει όλες τις κεραίες με βρόγχους στο επίπεδο των αξόνων xy.
3. Όταν και οι δύο F_θ και F_φ υπάρχουν, αλλά είναι επιλεγμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να συνδέονται με τη σχέση $F_\phi = \pm jF_\theta$, έτσι ώστε το δημιουργούμενο ηλεκτρικό πεδίο να έχει κυκλική πόλωση. Αυτή η περίπτωση περιλαμβάνει τις ελικοειδείς κεραίες που χρησιμοποιούνται στις δορυφορικές επικοινωνίες.

Κεφάλαιο 2

Κεραίες Εκπομπής και Λήψης

2.1 Διακυμάνσεις της Ενέργειας και Ένταση Ακτινοβολίας

Η διακύμανση της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας που εκπέμπεται από μια πηγή ρεύματος σε μακρινές αποστάσεις, δίνεται από το χρονικό εξαρτώμενο διάνυσμα Poynting, το οποίο υπολογίζεται σε συνάρτηση με τα πεδία ακτινοβολίας (1.10.4):

$$P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E\times H^{*}\right)=\frac{1}{2}\left(-jk\eta\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\right)\left(jk\frac{e^{jkr}}{4\pi r}\right)\mathrm{Re}\left[\left(\hat{\theta}F_{\theta}+\hat{\phi}F_{\phi}\right)\times\left(\hat{\phi}F_{\theta}^{*}-\hat{\theta}F_{\phi}^{*}\right)\right]$$

Σημειώνουμε ότι $\hat{\theta}\times\hat{\phi}=\hat{\mathrm{r}}$, έχουμε:

$$\left(\hat{\theta}F_{\theta}+\hat{\phi}F_{\phi}\right)\times\left(\hat{\phi}F_{\theta}^{*}-\hat{\theta}F_{\phi}^{*}\right)=\hat{\mathrm{r}}\left(\left|F_{\theta}\right|^{2}+\left|F_{\phi}\right|^{2}\right)=\hat{\mathrm{r}}\left|F_{\perp}(\theta,\phi)\right|^{2}$$

Οπότε το διάνυσμα διακύμανσης της ενέργειας θα είναι:

$$P=\hat{\mathrm{r}}P_{r}=\hat{\mathrm{r}}\frac{\eta k^{2}}{32\pi^{2}r^{2}}\left|F_{\perp}(\theta,\phi)\right|^{2} \qquad (2.1.1)$$

Έτσι, η ακτινοβολούμενη ενέργεια διαχέεται ακτινωτά από την πηγή ρεύματος και εξασθενεί ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης. Η γωνιακή διασπορά της ακτινοβολούμενης ενέργειας περιγράφεται από τον συντελεστή προτύπου ακτινοβολίας:

$$\left|F_{\perp}(\theta,\phi)\right|^{2}=\left|F_{\theta}(\theta,\phi)\right|^{2}+\left|F_{\phi}(\theta,\phi)\right|^{2} \qquad (2.1.2)$$

Η ισχύς dP που εισβάλλει στο χώρο του στοιχείου, ορίζει την ισχύ ανά μονάδα της περιοχής ή την πυκνότητα ισχύος της ακτινοβολίας:

$$\boxed{\frac{dP}{dS}=\frac{dP}{r^{2}d\Omega}=P_{r}=\frac{\eta k^{2}}{32\pi^{2}r^{2}}\left|F_{\perp}(\theta,\phi)\right|^{2}}$$

(πυκνότητα ισχύος) (2.1.3)

Η ένταση ακτινοβολίας $U(\theta,\varphi)$ ορίζεται ως η ισχύς που ακτινοβολείται ανά μονάδα στερεάς γωνίας που είναι η ποσότητα $dP/d\Omega=r^{2}\,dP/dS=r^{2}P_{r}$:

$$\boxed{U(\theta,\phi)=\frac{dP}{d\Omega}=r^{2}P_{r}=\frac{\eta k^{2}}{32\pi^{2}}\left|F_{\perp}(\theta,\phi)\right|^{2}}$$

(ένταση ακτινοβολίας) (2.1.4)

Η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς δίνεται ολοκληρώνοντας την εξίσωση ως προς όλες τις στερεές γωνίες με $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, όταν $0 \le \theta \le \pi$ και $0 \le \phi \le 2\pi$:

$$P_{rad} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta,\phi)d\Omega$$

(συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς) (2.1.5)

Ένα χρήσιμο σκεπτικό είναι ενός ισοτροπικού ακτινοβολέα, δηλαδή ενός ακτινοβολέα του οποίου η ένταση είναι η ίδια σε όλες τις κατευθύνσεις. Σε αυτή την περίπτωση η ακτινοβολούμενη ισχύς *P rad*, θα διανεμηθεί αμέσως σε όλες τις στερεές γωνίες δηλαδή στην συνολική στερεά γωνία μιας σφαίρας, ώστε η ένταση ισοτροπικής ακτινοβολίας θα είναι:

$$U_I = \left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_I = \frac{P_{rad}}{\Omega_{sphere}} = \frac{P_{rad}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta,\phi)d\Omega \quad (2.1.6)$$

Έτσι, U_I είναι η μέση τιμή της έντασης ακτινοβολίας ως προς όλες τις στερεές γωνίες. Η αντίστοιχη πυκνότητα ισχύος ενός τέτοιου ισοτροπικού ακτινοβολέα θα είναι:

$$\left(\frac{dP}{dS}\right)_I = \frac{U_I}{r^2} = \frac{P_{rad}}{4\pi r^2} \quad (2.1.7)$$

2.2 Κατευθυντικότητα, Κέρδος και Πλάτος Κύματος

Το κατευθυντικό κέρδος ενός συστήματος κεραίας κατά μια συγκεκριμένη διεύθυνση *(θ, φ)*, είναι η κανονικοποίηση της εντάσεως ακτινοβολίας από την αντίστοιχη ισοτροπική ένταση, δηλαδή:

$$D(\theta,\phi) = \frac{U(\theta,\phi)}{U_I} = \frac{U(\theta,\phi)}{P_{rad}/4\pi} = \frac{4\pi}{P_{rad}}\frac{dP}{d\Omega} \quad (2.2.1)$$

Μετράει την ικανότητα μιας κεραίας να κατευθύνει την ισχύ της ως προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση. Η μέγιστη τιμή του κέρδους κατευθυντικότητας, *D max*, είναι η κατευθυντικότητα της κεραίας και υφίσταται κατά μια συγκεκριμένη διεύθυνση (θ_0, φ_0). Η ένταση ακτινοβολίας θα είναι μέγιστη κατά τη διεύθυνση αυτή, $U_{\max} = U(\theta_0,\phi_0)$, έτσι ώστε:

$$D_{\max} = \frac{U_{\max}}{U_I} \quad (2.2.2)$$

Η κατευθυντικότητα εκφράζεται συνήθως σε dB με $D_{dB} = 10\log_{10} D_{\max}$. Επανεκφράζοντας την ένταση ακτινοβολίας ως προς το κέρδος κατευθυντικότητας, έχουμε:

$$\frac{dP}{d\Omega} = U(\theta,\phi) = D(\theta,\phi)U_I = \frac{P_{rad}D(\theta,\phi)}{4\pi} \quad (2.2.3)$$

Και για την πυκνότητα ισχύος στην διεύθυνση *(θ, φ)* είναι:

$$\frac{dP}{dS} = \frac{dP}{r^2 d\Omega} = \frac{P_{rad} D(\theta,\phi)}{4\pi r^2} \tag{2.2.4}$$

Συγκρίνοντας με την εξίσωση (2.1.7), σημειώνουμε ότι, εάν η ποσότητα της ισχύος εκπεμπόταν ισοτροπικά, τότε η εξίσωση (2.2.4) θα ήταν η αντίστοιχη ισοτροπική πυκνότητα ισχύος. Έτσι θα αναφερόμασταν στη $P_{rad} D(\theta,\phi)$ ως την ενεργή ισοτροπική ισχύ ή την ακτινοβολούμενη ενεργή ισχύ (ERP), κατά τη διεύθυνση *(θ, φ)*.

Κατά τη διεύθυνση του μέγιστου κέρδους, η ποσότητα θα καλείται ως η ενεργή ισοτροπική ακτινοβολούμενη ισχύς (EIRP). Ορίζει τη μέγιστη πυκνότητα ισχύος που επιτυγχάνεται από την κεραία:

$$\boxed{\left(\frac{dP}{dS}\right)_{\max} = \frac{P_{EIRP}}{4\pi r^2}}, \qquad \text{όπου} \quad P_{EIRP} = P_{rad} D_{\max} \tag{2.2.5}$$

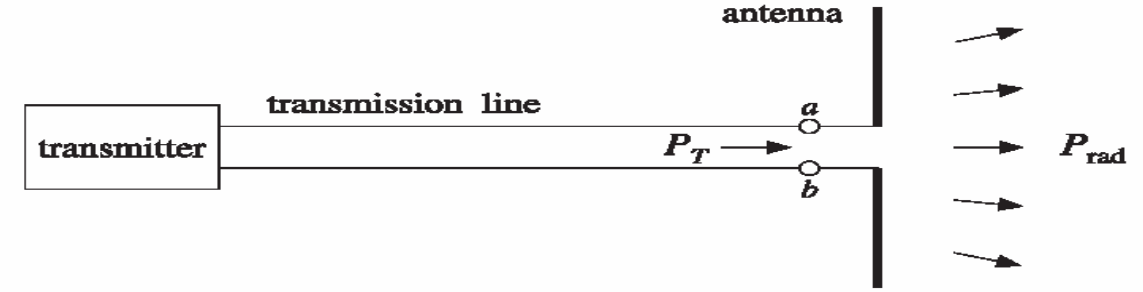
Συνήθως, οι επικοινωνούσες κεραίες, ειδικά η υψηλής κατευθυντικότητας, όπως οι κεραίες πιάτα, κατευθύνονται προς τη διεύθυνση του μέγιστου κέρδους κατευθυντικότητας της καθεμιάς.

Ένα σχετικό σκεπτικό είναι αυτό του κέρδους ισχύος ή απλά του κέρδους μιας κεραίας. Ορίζεται όπως στην εξίσωση (2.2.1), αλλά αντί να κανονικοποιηθεί από τη συνολική ακτινοβολούμενη ισχύ, κανονικοποιείται ως προς τη συνολική ισχύ P_T που δέχονται οι ακροδέκτες της κεραίας από έναν συνδεδεμένο πομπό όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.1:

$$\boxed{G(\theta,\phi) = \frac{U(\theta,\phi)}{P_T/4\pi} = \frac{4\pi}{P_T}\frac{dP}{d\Omega}} \tag{2.2.6}$$

Θα δούμε στο κεφάλαιο 2.4 ότι η ισχύς P_T που φτάνει στους ακροδέκτες της κεραίας είναι κατά το πλείστον η μισή από αυτή που παράγεται, ενώ η υπόλοιπη μισή μετατρέπεται σε θερμότητα στην εσωτερική αντίσταση της γεννήτριας.

Επιπλέον η ισχύς P_T μπορεί να διαφέρει από την ακτινοβολούμενη ισχύ P_{rad}, εξαιτίας πολλών μηχανισμών απωλειών, όπως ωμικές απώλειες από τα ρεύματα που διαρρέουν τα καλώδια της κεραίας ή απώλειες στο διηλεκτρικό μέσο που βρίσκεται η κεραία.



Σχήμα 2.2.1: Κατανεμημένη ισχύς σε μια κεραία κατά της εκπεμπόμενης ισχύος.

Ο ορισμός του κέρδους ισχύος δεν περιλαμβάνει την περίπτωση απωλειών από λανθασμένο συντονισμό της κατεύθυνσης εκπομπής προς την εσωτερική αντίσταση της κεραίας. Ο συντελεστής αποτελεσματικότητας της κεραίας ορίζεται ως:

$$e = \frac{P_{rad}}{P_T} \qquad \Rightarrow \qquad P_{rad} = eP_T \tag{2.2.7}$$

Γενικά, $0 \le e \le 1$. Για μια κεραία χωρίς απώλειες ο συντελεστής αποτελεσματικότητας θα είναι μονάδα και $P_{rad} = P_T$. Σε μια τέτοια ιδανική περίπτωση δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ κέρδους ισχύος ή κατευθυντικότητας. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.2.7) στην (2.2.1) βρίσκουμε $G = 4\pi U / P_T = e4\pi U / P_{rad}$, ή :

$$\boxed{G(\theta,\phi) = eD(\theta,\phi)} \tag{2.2.8}$$

Το μέγιστο κέρδος σχετίζεται με την κατευθυντικότητα με τη σχέση $G_{\max} = eD_{\max}$. Προκύπτει ότι η ενεργή ακτινοβολούμενη ισχύς μπορεί να γραφεί ως $P_{rad} D(\theta,\phi) = P_T G(\theta,\phi)$ και η EIRP ως $P_{EIRP} = P_{rad} D_{\max} = P_T G_{\max}$.

Οι συναρτήσεις γωνιακής διασποράς που ορίσαμε έως τώρα και που είναι οι $G(\theta,\phi), D(\theta,\phi), U(\theta,\phi)$ είναι όλες αναλογικές μεταξύ τους. Καθεμιά εμφανίζει μια διαφορετική πλευρά του συστήματος ακτινοβολίας. Περιγράφοντας τη γωνιακή διασπορά της ακτινοβολίας, αποδεικνύεται ευκολόχρηστο να τα θεωρήσουμε σε σχέση με τη μέγιστη τιμή της. Έτσι ορίζουμε το κανονικοποιημένο πλαίσιο ισχύος ή το κανονικοποιημένο κέρδος με:

$$\boxed{\mathrm{g}(\theta,\phi) = \frac{G(\theta,\phi)}{G_{\max}}} \tag{2.2.9}$$

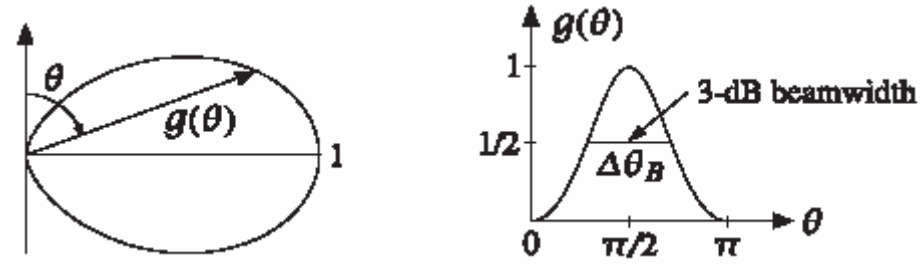
Εξαιτίας της αναλογίας των πολλών γωνιακών συναρτήσεων, έχουμε:

$$\mathrm{g}(\theta,\phi) = \frac{G(\theta,\phi)}{G_{\max}} = \frac{D(\theta,\phi)}{D_{\max}} = \frac{U(\theta,\phi)}{U_{\max}} = \frac{\left|F_{\perp}(\theta,\phi)\right|^2}{\left|F_{\perp}\right|^2_{\max}} \tag{2.2.10}$$

Γράφοντας $P_T G(\theta,\phi) = P_T G_{\max} \mathrm{g}(\theta,\phi)$, έχουμε την πυκνότητα ισχύος:

$$\frac{dP}{dS} = \frac{P_T G_{\max}}{4\pi r^2} \mathrm{g}(\theta,\phi) = \frac{P_{EIRP}}{4\pi r^2} \mathrm{g}(\theta,\phi) \tag{2.2.11}$$

Αυτός ο τύπος είναι χρήσιμος για την περιγραφή επικοινωνούντων κεραιών και ραντάρ. Το κανονικοποιημένο κέρδος συνήθως περιγράφεται με ένα πολικό σημείο με πολικές συντεταγμένες *(ρ, θ)* έτσι ώστε $\rho = \mathrm{g}(\theta)$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.2. (Το σχήμα αυτό αναπαριστά το κέρδος κεραίας δίπολου μισού μήκους κύματος που δίνεται από τη σχέση $\mathrm{g}(\theta) = \cos^2(0.5\pi\cos\theta)/\sin^2\theta$.) Το πλάτος κύματος των 3-dB ή της μισής ισχύος ορίζεται ως η διαφορά $\Delta\theta_B = \theta_2 - \theta_1$ των γωνιών 3-dB στις οποίες το κανονικοποιημένο κέρδος είναι ίσο με ½ ή -3dB.



Σχήμα 2.2.2: Πολικό και κανονικό διάγραμμα κανονικοποιημένου κέρδους κατά γωνία.

Οι συναρτήσεις MATLAB dbp, abp, dbz, abz επιτρέπει τη μέτρηση του κέρδους σε dB ή σε ακέραιες μονάδες ως προς την πολική γωνία θ ή την αζιμουθιακή γωνία φ. Η τυπική τους χρήση είναι η ακόλουθη:

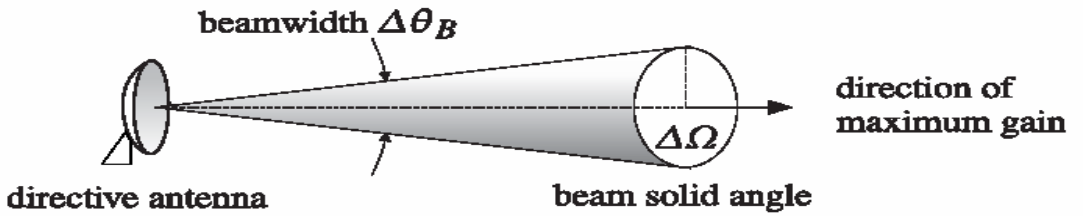
```
dbp(theta, g, rays, Rm, width);
abp(theta, g, rays, width);
dbz(phi, g, rays, Rm, width);
abz(phi, g, rays, width);
```

Παράδειγμα 2.2.1:
Ένας σταθμός τηλεόρασης εκπέμπει με ισχύ 10 KW και κέρδος 15dB σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση. Καθορίστε τις τιμές peak και rms του ηλεκτρικού πεδίου E, σε μια απόσταση 5 Km από το σταθμό.
Λύση:
Το κέρδος για ακέραιες μονάδες θα είναι $G = 10^{G_{dB}/10} = 10^{15/10} = 31.62$. Άρα η ακτινοβολούμενη EIRP θα είναι $P_{EIRP} = P_T G = 10 \times 31.62 = 316.2kW$. Το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r=5km δίνεται από την εξίσωση (2.2.5):

$$\frac{dP}{dS} = \frac{P_{EIRP}}{4\pi r^2} = \frac{1}{2\eta} E^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\eta P_{EIRP}}{2\pi}}$$

Αυτό δίνει $E = 0.87V/m$. Η rms τιμή είναι $E_{rms} = E/\sqrt{2} = 0.62V/m$.

Ένα άλλο χρήσιμο σκεπτικό είναι αυτό της δέσμης στέρεας γωνίας μιας κεραίας, η οποία συγκεντρώνει όλη την ακτινοβολούμενη ισχύ της P_{rad} σε μια μικρή στερεά γωνία $\Delta\Omega$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.3.



Σχήμα 2.2.3: Δέσμη στερεάς γωνίας και πλάτος δέσμης μιας υψηλά κατευθυντικής κεραίας.

Η ένταση ακτινοβολίας στη διεύθυνση της στερεάς γωνίας θα είναι:

$$U = \frac{\Delta P}{\Delta \Omega} = \frac{P_{rad}}{\Delta \Omega} \tag{2.2.12}$$

Όπου υποθέτουμε ότι $\Delta P = P_{rad}$. Άρα έχουμε: $D_{\max} = 4\pi U / P_{rad} = 4\pi / \Delta\Omega$, ή,

$$\boxed{D_{\max} = \frac{4\pi}{\Delta \Omega}} \tag{2.2.13}$$

Έτσι, όσο πιο συγκεντρωμένη είναι η δέσμη τόσο υψηλότερη είναι η κατευθυντικότητα. Αν και η (2.2.13) εξήχθηκε με βάση την υπόθεση μιας υψηλά κατευθυντικής κεραίας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ο ορισμός της δέσμης στερεάς γωνίας για οποιαδήποτε κεραία, και θα είναι:

$$\boxed{\Delta \Omega = \frac{4\pi}{D_{\max}}} \tag{2.2.14}$$

Χρησιμοποιώντας $D_{\max} = U_{\max} / U_I$ και την εξίσωση (2.1.6) έχουμε:

$$\Delta \Omega = \frac{4\pi U_I}{U_{\max}} = \frac{1}{U_{\max}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U(\theta, \phi) d\Omega \quad , \quad \text{ή,}$$

$$\boxed{\Delta \Omega = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{g}(\theta, \phi) d\Omega} \tag{2.2.15}$$

όπου g(θ,φ) είναι το κανονικοποιημένο κέρδος της εξίσωσης (2.2.10). Γράφοντας $P_{rad} = 4\pi U_I$, έχουμε:

$$\Delta \Omega = \frac{P_{rad}}{U_{\max}} \quad \Rightarrow \quad U_{\max} = \frac{P_{rad}}{\Delta \Omega} \tag{2.2.16}$$

Αυτή είναι η γενική περίπτωση της εξίσωσης (14.2.12). Επίσης έχουμε:

$$P_{rad} = U_{\max} \Delta \Omega \tag{2.2.7}$$

Αυτό είναι και το ευκολόχρηστο για την αριθμητική προσέγγιση του P_{rad}. Για να μετρήσουμε το πλάτος του κύματος μιας υψηλά κατευθυντικής κεραίας, υποθέτουμε ότι το κέρδος κατευθυντικότητας είναι ίσο με τη μέγιστη τιμή του, ομοιόμορφα σε ολόκληρη τη στερεά γωνία $\Delta\Omega$ στο σχήμα 2.2.3. και είναι, $D(\theta, \phi) = D_{\max}$, για $0 \le \theta \le \Delta\theta_B / 2$. Έτσι ακολουθεί ότι το κανονικοποιημένο κέρδος θα είναι:

$\mathrm{g}(\theta, \phi) = 1$, if $0 \le \theta \le \Delta\theta_B / 2$
$\mathrm{g}(\theta, \phi) = 0$, if $\Delta\theta_B / 2 < \theta \le \pi$

Από τον ορισμό (2.2.15) έχουμε:

$$\Delta\Omega = \int_0^{\Delta\theta_B/2}\int_0^{2\pi} d\Omega = \int_0^{\Delta\theta_B/2}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi\left(1-\cos\frac{\Delta\theta_B}{2}\right) \qquad (2.2.18)$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $\cos x \cong 1 - x^2/2$, έχουμε για μικρά πλάτη κύματος:

$$\boxed{\Delta\Omega = \frac{\pi}{4}\left(\Delta\theta_B\right)^2} \qquad (2.2.19)$$

και έτσι η κατευθυντικότητα μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση με το πλάτος κύματος:

$$\boxed{D_{\max} = \frac{16}{\Delta\theta_B^2}} \qquad (2.2.20)$$

Παράδειγμα 2.2.2:
Βρείτε το πλάτος κύματος σε μοίρες μια κεραίας πιάτου χωρίς απώλειες, με κέρδος 15 dB.

Η κατευθυντικότητα και το κέρδος είναι όμοια σε αυτή την περίπτωση, οπότε η εξίσωση (2.2.20) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του πλάτους κύματος: $\Delta\theta_B = \sqrt{16/D}$, όπου $D = G = 10^{15/10} = 31.62$. Έτσι βρίσκουμε: $\Delta\theta_B = 0.71 rads$, ή $\Delta\theta_B = 40.76^o$.

Για μια κεραία με κέρδος/κατευθυντικότητα 40 dB, θα έχουμε: $D = 10^4$ και βρίσκουμε $\Delta\theta_B = 0.04 rads = 2.29^o$.

Παράδειγμα 2.2.3:
Ένας γεωστατικός δορυφόρος σε τροχιά 36000 km απαιτείται για να έχουμε πλήρη κάλυψη της γης. Ποιο είναι το κέρδος της κεραίας του σε dB και το πλάτος της δέσμης ακτινοβολίας? Να επαναλάβετε αν ο δορυφόρος απαιτείται να καλύπτει μια περιοχή ίση με το μέγεθος των ΗΠΑ.
Λύση:
Η ακτίνα της γης είναι R=6400 km. Κοιτάζοντας από το δορυφόρο στη γη φαίνεται σαν ένας επίπεδος δίσκος εμβαδού $\Delta S = \pi R^2$. Ακολουθεί ότι η εκτεινώμενη στερεά γωνία και το αντίστοιχο κέρδος / κατευθυντικότητας θα είναι:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{r^2} = \frac{\pi R^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{4\pi}{\Delta\Omega} = \frac{4r^2}{R^2}$$

όπου r=36000km και βρίσκουμε D=126,56 και σε dB, $D_{dB} = 10\log_{10} D = 21.02 dB$. Το αντίστοιχο πλάτος της δέσμης θα είναι: $\Delta\theta_B = \sqrt{16/D} = 0.36 rad = 20.37^o$.

Για την περιοχή των ΗΠΑ η απόσταση από ακτή σε ακτή είναι 3000 mi ή 4800 km, αντιστοιχεί σε μια περιοχή ακτίνας R=2400 km, το οποίο οδηγεί στο D=900 και Ddb=29,54 db. Το πλάτος της δέσμης σε αυτή την περίπτωση θα είναι: $\Delta\theta_B = 7.64^o$.
Θεωρώντας τη γη σαν ένα επίπεδο δίσκο, υπερεκτιμούμε την απαιτούμενη γωνία $\Delta\theta_B$ για παγκόσμια κάλυψη. Κοιτάζοντας από ένα δορυφόρο σε ύψος r, η γωνία μεταξύ της κατακόρυφου και της εφαπτομένης προς την επιφάνεια της γης δίνεται από $\sin\theta = R/(r+R)$,

που δίνει για r=36000km, θ=8.68° . Η εκτεινώμενη γωνία θα είναι τότε $\Delta\theta_B = 2\theta = 0.303rad = 17.36^o$. Έτσι, το απαιτούμενο κέρδος της κεραίας θα είναι $G = 16/\Delta\theta_B^2 = 174.22 = 22.41dB$. Η προσέγγιση του επίπεδου δίσκου είναι πιο ακριβής για μικρότερες περιοχές από την επιφάνεια της γης, οι οποίες κείτονται απευθείας κάτω από το δορυφόρο.

Παράδειγμα 2.2.4:
Η ακτινωτή απόσταση μιας γεωστατικής τροχιάς μπορεί να υπολογιστεί εξισώνοντας τη κεντρομόλο και τη βαρυτική επιτάχυνση και απαιτώντας η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου να είναι ίση με την περίοδο μιας ημέρας, έχουμε $\omega = 2\pi/T$, όπου T=24hr=86400sec. Ως m ορίζουμε τη μάζα του δορυφόρου και $M_\oplus$ τη μάζα της γης:

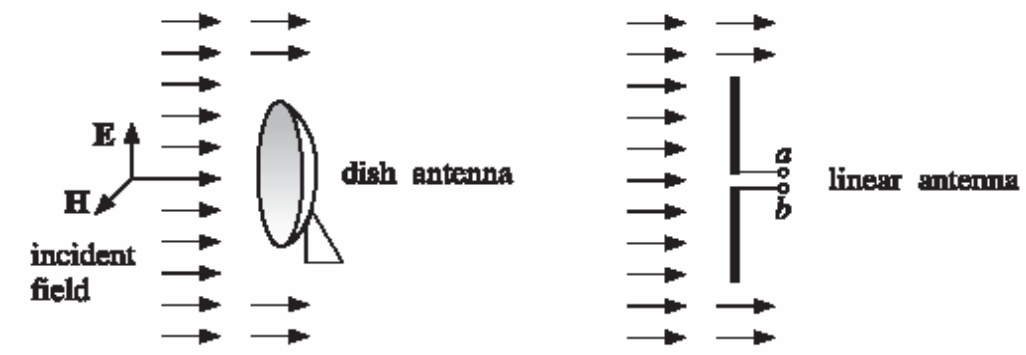
$$\frac{GmM_\oplus}{r^2} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \qquad \Rightarrow \qquad r = \left(\frac{GM_\oplus T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Η απόσταση r μετριέται από το κέντρο της γης. Το αντίστοιχο ύψος από την επιφάνεια της γης είναι $h=r-R$. Για μεγαλύτερη ακρίβεια της ακτίνας της γης R=6378 km, οι υπολογιζόμενες τιμές είναι:

r = 42237km = 26399mi
h = 35860km = 22414mi

2.3. Ενεργός Περιοχή

Όταν μια κεραία λειτουργεί σαν κεραία δέκτης, εξάγει ένα συγκεκριμένο ποσό ισχύος από ένα προσπίπτων ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.1, ένα προσπίπτων κύμα ερχόμενο από μακρινή απόσταση μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ομοιόμορφο επίπεδο κύμα το οποίο αναχαιτίζεται από την κεραία.



Σχήμα 2.3.1 Ενεργός περιοχή μιας κεραίας

Το προσπίπτων ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί ρεύματα στην κεραία. Τέτοια ρεύματα μπορούν να αναπαρασταθούν με μια γεννήτρια Thevenin, η οποία μεταφέρει την ισχύ σε οποιοδήποτε συνδεδεμένο φορείο αντίστασης δέκτη.

Τα παραχθέντα ρεύματα ακτινοβολούν ένα ηλεκτρικό πεδίο το οποίο επεμβαίνει στο προσπίπτον πεδίο δημιουργώντας μια σκιά πίσω από την κεραία, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.1.

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο έξω από την κεραία θα είναι το σύνολο του προσπίπτοντος και του ακτινοβολούντος πεδίου. Για μια ιδανικά αγώγιμη κεραία οι περιοριστικές συνθήκες θα είναι ότι το εφαπτομενικό τμήμα του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου εξαφανίζεται στην επιφάνεια της κεραίας. Στο κεφάλαιο 20, χρησιμοποιούμε αυτούς τους περιορισμούς για να λύσουμε τις εξισώσεις των ολοκληρωμάτων των Hallen και Pocklighton, που ικανοποιούν το παραγόμενο ρεύμα.

Η πυκνότητα ισχύος του προσπίπτοντος κύματος στην τοποθεσία της κεραίας δέκτη μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου κύματος, $P_{inc} = E^2/2\eta$.

Η ενεργός περιοχή ή το ενεργό διάφραγμα Α της κεραίας ορίζεται να είναι εκείνη η περιοχή όπου όταν προσπίπτει η προσπίπτουσα πυκνότητα ισχύος P_{inc}, έχουμε την ποσότητα της λαμβανόμενης P_R στους ακροδέκτες εξόδου της κεραίας:

$$\boxed{P_R = AP_{inc}} \tag{2.3.1}$$

Για μια κεραία με απώλειες, η διαθέσιμη ισχύς στους ακροδέκτες θα είναι μικρότερη από την εξαγόμενη ακτινοβολούμενη ισχύ P_{rad}, κατά το συντελεστή αποτελεσματικότητας $P_R = eP_{rad}$. Έτσι, μπορούμε επίσης να ορίσουμε το μέγιστο ενεργό διάφραγμα A_m ως την περιοχή η οποία αντανακλά την ισχύ P_{rad} του προσπίπτοντος κύματος, δηλαδή, $P_{rad} = A_m P_{inc}$. Έτσι έχουμε:

$$A = eA_m \tag{2.3.2}$$

Η ενεργός περιοχή εξαρτάται από διεύθυνση πρόσπτωσης (θ,φ) του προσπίπτοντος κύματος. Για όλες τις κεραίες μπορεί να αποδειχθεί ότι η ενεργός περιοχή $A(\theta,\varphi)$ σχετίζεται με το κέρδος ισχύος $G(\theta,\varphi)$ και του μήκους κύματος $\lambda = c/f$, όπως:

$$\boxed{G(\theta,\phi) = \frac{4\pi A(\theta,\phi)}{\lambda^2}} \tag{2.3.3}$$

Όμοια, επειδή $G(\theta,\phi) = eD(\theta,\phi)$, το μέγιστο ενεργό διάφραγμα θα σχετίζεται με το κέρδος κατευθυντικότητας με:

$$D(\theta,\phi) = \frac{4\pi A_m(\theta,\phi)}{\lambda^2} \tag{2.3.4}$$

Πρακτικά, η λεγόμενη ενεργός περιοχή Α μιας κεραίας είναι η τιμή που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή του κέρδους $G_{\max}$. Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε:

$$\boxed{G_{\max} = \frac{4\pi A}{\lambda^2}} \tag{2.3.5}$$

Ομοίως. Έχουμε για την κατευθυντικότητα $D_{\max} = 4\pi A_m/\lambda^2$. Επειδή $D_{\max}$ σχετίζεται με τη δέσμη στερεάς γωνίας με $D_{\max} = 4\pi/\Delta\Omega$, ακολουθεί ότι:

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\Delta\Omega} = \frac{4\pi A_m}{\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad A_m \Delta\Omega = \lambda^2 \tag{2.3.6}$$

Γράφοντας $\lambda = c/f$, μπορούμε να εκφράσουμε την εξίσωση (2.3.5) σε σχέση με τη συχνότητα:

$$G_{\max} = \frac{4\pi f^2 A}{c^2} \tag{2.3.7}$$

Η ενεργός περιοχή δεν είναι ίση με τη φυσική περιοχή μιας κεραίας. Για παράδειγμα, οι γραμμικές κεραίες ούτε καν έχουν χαρακτηριστική φυσική περιοχή. Για κεραίες πιάτα ή διακλαδώσεων η ενεργός περιοχή είναι τυπικά ένα τμήμα της φυσικής περιοχής (περίπου 55% - 65% για τα πιάτα και 60% - 80% για τις διακλαδώσεις). Έτσι, εάν ένα πιάτο έχει διάμετρο d μέτρα, θα έχουμε:

$$\boxed{A = e_a \frac{1}{4}\pi d^2} \tag{2.3.8}$$

όπου e_a είναι ο συντελεστής ενεργού διαφράγματος και τυπικά $e_a = 0.55 - 0.65$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.3.5) και (2.3.8) έχουμε:

$$\boxed{G_{\max} = e_a \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2} \tag{2.3.9}$$

Οι κεραίες εντάσσονται σε δύο κατηγορίες: κεραίες σταθερής περιοχής, όπως είναι οι κεραίες πιάτα για τις οποίες το A είναι ανεξάρτητο από τη συχνότητα, και σε κεραίες σταθερού κέρδους, όπως είναι οι γραμμικές κεραίες στις οποίες το G είναι ανεξάρτητο της συχνότητας. Για τις κεραίες σταθερής περιοχής το κέρδος αυξάνεται τετραγωνικά ως προς f, ενώ για κεραίες σταθερού κέρδους το A μειώνεται τετραγωνικά ως προς f.

Παράδειγμα 14.3.1:

Οι γραμμικές κεραίες είναι κεραίες σταθερού κέρδους. Για παράδειγμα θα δούμε στο κεφάλαιο 3.1 ότι για το κέρδος ενός διπόλου Hertz, ενός διπόλου μισού μήκους κύματος και μιας κεραίας μονοπολικής ισχύουν οι σταθερές:

$$G_{hertz} = 1.5, \quad G_{dipole} = 1.64, \quad G_{monopole} = 3.28$$

Η εξίσωση (2.3.5) δίνει την ενεργό περιοχή $A = G\lambda^2/4\pi$:

$$A_{hertz} = 0.1194\lambda^2, \quad A_{dipole} = 0.1305\lambda^2, \quad A_{monopole} = 0.2610\lambda^2$$

Σε όλες τις περιπτώσεις η ενεργός περιοχή είναι ανάλογη με το λ^2 μειώνεται με το f^2. Στην περίπτωση της συχνά χρησιμοποιούμενης μονοπολικής κεραίας, η ενεργός περιοχή είναι περίπου ίση με ένα τετράγωνο πλευρών λ και $\lambda/4$, όπου το δεύτερο είναι το φυσικό μήκος του μονοπόλου.

Παράδειγμα 2.3.2: Καθορίστε το κέρδος σε dB μιας κεραίας πιάτου διαμέτρου 0.5m που λειτουργεί με μια συχνότητα δορυφορικής ζεύξης 4GHz και έχει αποτελεσματικότητα διαφράγματος 60%. Επαναλάβετε εάν η συχνότητα της ζεύξης είναι 11GHz. Επαναλάβετε εάν η διάμετρος είναι διπλάσια.

Λύση: Η ενεργός περιοχή και το κέρδος μιας κεραίας πιάτο με διάμετρο d είναι:

$$A = e_a \frac{1}{4}\pi d^2 \qquad \Rightarrow \qquad G = \frac{4\pi A}{\lambda^2} = e_a\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 = e_a\left(\frac{\pi f d}{c}\right)^2$$

Τα υπολογιζόμενα κέρδη G σε ακέραιες μονάδες και σε dB είναι τα εξής:

	$d = 0.5m$	$d = 1m$
$f = 4GHz$	$263 = 24dB$	$1052 = 30dB$
$f = 11GHz$	$1990 = 33dB$	$7960 = 39dB$

Διπλασιάζοντας τη διάμετρο (ή τη συχνότητα) αυξάνεται το κέρδος κατά 6dB. Οπότε εάν μια κεραία πιάτο πρέπει να έχει κέρδος G η παραπάνω εξίσωση μπορεί να λυθεί για την απαιτούμενη διάμετρο d σε συνάρτηση των G και f.

Το πλάτος δέσμης για μια κεραία πιάτο μπορεί να υπολογιστεί συνδυάζοντας την (2.2.20) με τις (2.3.5) και (2.3.8) υποθέτοντας ότι έχουμε μια κεραία χωρία απώλειες με διάμετρο d και αποτελεσματικότητα διαφράγματος 100%, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.2.20) ακριβώς, έχουμε:

$$G_{\max} = \frac{4\pi A}{\lambda^2} = \left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 = D_{\max} = \frac{16}{\Delta\theta_B^2}$$

Λύνοντας για $\Delta\theta_B$, έχουμε την έκφραση σε ακτίνια και σε μοίρες:

$$\Delta\theta_B = \frac{4}{\pi}\frac{\lambda}{d} = 1.27\frac{\lambda}{d}, \qquad \Delta\theta_B = 73^{\circ}\frac{\lambda}{d} \tag{2.3.10}$$

Έτσι, το πλάτος δέσμης είναι αντιστρόφως ανάλογο της διαμέτρου της κεραίας. Στην πράξη, γρήγοροι υπολογισμοί των πλατών δέσμης 3dB σε μοίρες δίνονται αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.3.10):

$$\boxed{\Delta\theta_B = 1.22\frac{\lambda}{d} = 70^{\circ}\frac{\lambda}{d}} \tag{2.3.11}$$

Η σταθερά 70° παριστάνει μόνο μια σκληρή προσέγγιση (άλλες επιλογές μπορεί να είναι μέσα στην περιοχή των 65° - 75°). Λύνοντας για τον ρυθμό $d/\lambda = 1.22/\Delta\theta_B$, μπορεί να εκφράσουμε το μέγιστο κέρδος αντιστρόφως ανάλογα με το $\Delta\theta_B^2$ ως ακολούθως:

$$G_{\max} = e_a\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 = \frac{e_a\pi^2(1.22)^2}{\Delta\theta_B^2}$$

Για μια τυπική αποτελεσματικότητα διαφράγματος 60% η έκφραση αυτή μπορεί να γραφτεί με τον ακόλουθο προσεγγιστικό τύπο, όπου η $\Delta\theta_B$ δίνεται σε μοίρες:

$$\boxed{G_{\max} = \frac{30000}{\Delta\theta_B^2}} \qquad (2.3.12)$$

Οι εξισώσεις (2.3.11) και (2.3.12) μπορούν να θεωρηθούν ως προσεγγιστικοί κανόνες για τα πλάτη δέσμης και τα κέρδη μιας κεραίας πιάτου.

Παράδειγμα 2.3.3:
Για την κεραία διαμέτρου 0.5m του προηγούμενου παραδείγματος υπολογίστε το πλάτος δέσμης για 2 συχνότητες ζεύξης των 4GHz και 11GHz.

Τα λειτουργικά μήκη κύματος και στις δύο περιπτώσεις είναι: $\lambda = 7.5cm$ και $\lambda = 2.73cm$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.3.11) βρίσκουμε $\Delta\theta_B = 10.5^o$ και $\Delta\theta_B = 3.8^o$.

Παράδειγμα 2.3.4:
Ένας γεωστατικός δορυφόρος σε ύψος 36000km πρέπει να έχει παγκόσμια κάλυψη. Χρησιμοποιώντας τις προσεγγιστικές εξισώσεις καθορίστε το κέρδος σε dB και τη διάμετρο της κεραίας του δορυφόρου για μια συχνότητα ζεύξης 4GHz. Επαναλάβετε για 11GHz.
Λύση:
Το πρόβλημα αυτό αναλύθηκε στο παράδειγμα 2.2.3. Η γωνία της δέσμης για παγκόσμια κάλυψη βρέθηκε ότι είναι $\Delta\theta_B = 17.36^o$. Από την εξίσωση (.3.11) βρίσκουμε:

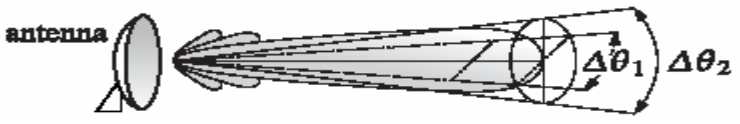
$$d = \lambda\frac{70^o}{\Delta\theta_B} = 7.5\frac{70^o}{17.36^o} = 30cm$$

Από την εξίσωση (2.3.12) βρίσκουμε:

$$G = \frac{30000}{\Delta\theta_B^2} = \frac{30000}{17.36^2} = 100 = 20dB$$

Για 11GHz βρίσκουμε d=11cm και το G παραμένει το ίδιο.

Στις εξισώσεις (2.2.20) και (2.3.12) υποθέσαμε απλά ότι το πλάνο της ακτινοβολίας ήταν ανεξάρτητο από την γωνία φ. Όταν το πλάνο δεν είναι συμμετρικό μπορούμε να ορίσουμε δύο ορθογώνιες πολικές διευθύνσεις οριζόμενες από τις γωνίες θ_1 και θ_2 όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.2.



Σχήμα 2.3.2: Πλάτη δέσμης ημίσειας ισχύος στις δύο κύριες πολικές διευθύνσεις.

Σ' αυτή την περίπτωση $d\Omega = d\theta_1 d\theta_2$ και μπορούμε να προσεγγίσουμε τη δέσμη στερεάς γωνίας με το παράγωγο των αντίστοιχων πλατών δέσμης 3-dB σε αυτές τις δύο διευθύνσεις, $\Delta\Omega = \Delta\theta_1 \Delta\theta_2$. Έπειτα η κατευθυντικότητα παίρνει τη μορφή (με τις γωνίες σε ακτίνια και σε μοίρες):

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\Delta\Omega} = \frac{4\pi}{\Delta\theta_1 \Delta\theta_2} = \frac{41253}{\Delta\theta_1^{\circ} \Delta\theta_2^{\circ}} \tag{2.3.13}$$

Οι εξισώσεις (2.3.12) και (2.3.13) είναι παραδείγματα μιας πιο γενικής έκφρασης η οποία συσχετίζει την κατευθυντικότητα ή το κέρδος με τα πλάτη δέσμης 3-dB για τις κεραίες διαφράγματα:

$$\boxed{G_{\max} = \frac{p}{\Delta\theta_1 \Delta\theta_2}} \tag{2.3.14}$$

όπου p είναι μια σταθερά κέρδους–πλάτους δέσμης της οποίας η τιμή εξαρτάται αποκλειστικά από τη συγκεκριμένη κεραία. Οι πρακτικές τιμές του p κυμαίνονται μεταξύ 25000 – 35000 (με τις γωνίες πλάτους δέσμης σε μοίρες).

2.4 Ισοδύναμα Κυκλώματα κεραιών.

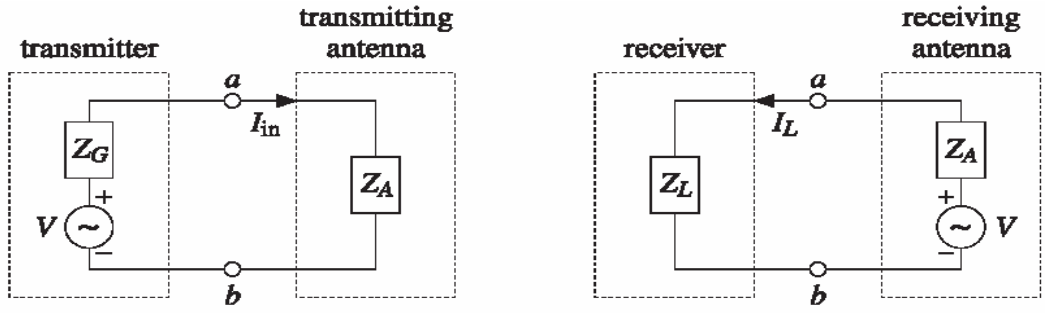
Για την γεννήτρια που τροφοδοτεί μία εκπέμπουσα κεραία, όπως στο σχήμα 2.2.1, η κεραία εμφανίζεται ως φορτίο. Όμοια, ένας δέκτης που συνδέεται στους ακροδέκτες εξόδου μιας κεραίας δέκτη, εμφανίζεται στην κεραία σαν μια αντίσταση φορτίου. Τέτοιες απλές αναπαραστάσεις ισοδύναμων κυκλωμάτων κεραιών δεκτών ή πομπών, φαίνονται στο σχήμα 2.4.1, όπου και στις δύο περιπτώσεις ορίζουμε V την τάση Thevenin του ισοδύναμου ανοιχτού κυκλώματος.

Στην περίπτωση μιας κεραίας που εκπέμπει, η κεραία εξομοιώνεται από μια αντίσταση φορτίου Z_A, που, γενικά, και οι δύο θα έχουν από ένα τμήμα αντίστασης και ένα αντίδρασης, $Z_A = R_A + jX_A$. Η αντίδραση αναπαριστά την ενέργεια που συγκεντρώνεται στα πεδία κοντά στην κεραία, ενώ η αντίσταση αναπαριστά τις απώλειες ενέργειας, οι οποίες εμφανίζονται διότι: (α) η ενέργεια εκπέμπεται μακριά από την κεραία και (β) η ενέργεια χάνεται με τη μορφή θερμότητας στα κυκλώματα της κεραίας και στο μέσο που την περιβάλει.

Η γεννήτρια έχει τη δική της εσωτερική αντίσταση $Z_G = R_G + jX_G$. Η ένταση του ρεύματος στους ακροδέκτες εισόδου της κεραίας θα είναι $I_{in} = V/(Z_G + Z_A)$, κάτι που μας επιτρέπει να καθορίσουμε: (α) τη συνολική ισχύ που παράγεται από τη γεννήτρια P_{tot}, (β) την ισχύ που φθάνει στους ακροδέκτες της κεραίας P_T, και (γ) την ισχύ P_G που χάνεται στην εσωτερική αντίσταση της γεννήτριας R_G. Αυτές είναι :

$$P_{tot} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(VI_{in}^{*}\right) = \frac{1}{2}\frac{|V|^2 (R_G + R_A)}{|Z_G + Z_A|^2} \tag{2.4.1}$$

$$P_T = \frac{1}{2}|I_{in}|^2 R_A = \frac{1}{2}\frac{|V|^2 R_A}{|Z_G + Z_A|^2}, P_G = \frac{1}{2}|I_{in}|^2 R_G = \frac{1}{2}\frac{|V|^2 R_G}{|Z_G + Z_A|^2}$$



Σχήμα 2.4.1: Ισοδύναμα κυκλώματα κεραιών εκπομπής και λήψης.

Αποδεικνύεται ότι $P_{tot} = P_T + P_G$. Ένα μέρος της ισχύος P_T που φθάνει στην κεραία, εκπέμπεται μακριά, ας πούμε ότι είναι P_{rad}, και το υπόλοιπο καταναλώνεται σαν ωμικές απώλειες, ας πούμε P_{ohm}. Έτσι, $P_T = P_{rad} + P_{ohm}$. Τα δύο αυτά μέρη μπορούν να αναπαρασταθούν ικανοποιητικά από δύο ισοδύναμες αντιστάσεις, γράφοντας $R_A = R_{rad} + R_{ohm}$, όπου R_{rad} είναι η αντίσταση ακτινοβολίας. Έτσι, έχουμε,

$$P_T = \frac{1}{2}|I_{in}|^2 R_A = \frac{1}{2}|I_{in}|^2 R_{rad} + \frac{1}{2}|I_{in}|^2 R_{ohm} = P_{rad} + P_{ohm} \tag{2.4.2}$$

Ο παράγοντας αποτελεσματικότητας της εξίσωσης (2.2.7) αποδεικνύεται ότι είναι :

$$e = \frac{P_{rad}}{P_T} = \frac{R_{rad}}{R_A} = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{ohm}}$$

Για να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα ισχύος P_T που φθάνει στην κεραία (και να ελαχιστοποιήσουμε παράλληλα την απώλεια ισχύος στις εσωτερικές αντιστάσεις της γεννήτριας), η αντίσταση του φορτίου πρέπει να ικανοποιεί την συνηθισμένη συνθήκη συζυγίας:

$$Z_A = Z_G^* \Leftrightarrow R_A = R_G, X_A = -X_G$$

Στην περίπτωση αυτή, $|Z_G + Z_A|^2 = (R_G + R_A)^2 + (X_G + X_A)^2 = 4R_G^2$, και ακολουθεί ότι η μέγιστη ισχύς που μεταφέρεται στο φορτίο θα είναι το ένα δεύτερο της συνολικής (το άλλο μισό χάνεται ως R_G), και έχουμε,

$$\boxed{P_{T,\max} = \frac{1}{2}P_{tot} = \frac{|V|^2}{8R_G}} \tag{2.4.3}$$

Αυτή είναι η διαθέσιμη ισχύς της γεννήτριας. Αν η γεννήτρια και η κεραία είναι ασύμβατες, τότε έχουμε:

$$P_T = \frac{|V|^2}{8R_G}\frac{4R_A R_G}{|Z_A + Z_G|^2} = P_{T,\max}\left(1 - |\Gamma_{gen}|^2\right), \Gamma_{gen} = \frac{Z_A - Z_G^*}{Z_A + Z_G} \tag{2.4.4}$$

Συχνά η εξίσωση (2.4.3) γράφεται σε συνάρτηση της τιμής rms της πηγής, η οποία είναι $V_{rms} = |V|/\sqrt{2}$, και οδηγεί στην $P_{T,\max} = V_{rms}^2 / 4R_G$.

Η περίπτωση μιας κεραίας δέκτη είναι παρόμοια. Οι παραγόμενες εντάσεις ρεύματος στην κεραία μπορούν να αναπαρασταθούν με μια ισοδύναμη γεννήτρια κατά Thevenin (το δυναμικό ανοιχτού κυκλώματος στους ακροδέκτες εξόδου της κεραίας) και με μια εσωτερική αντίσταση Z_A. Μια συνέπεια της αρχής της αμοιβαιότητας είναι ότι η Z_A είναι η ίδια ανεξάρτητα αν η κεραία εκπέμπει η λαμβάνει.

Το ρεύμα στο φορτίο είναι $I_L = V/(Z_A + Z_L)$, όπου η αντίσταση φορτίου είναι $Z_L = R_L + jX_L$. Όπως προηγουμένως, μπορούμε να καθορίσουμε την συνολική ισχύ P_{tot} που παράγεται από τη γεννήτρια (και ανακλάται στην κεραία), και της ισχύος P_R που φθάνει τελικά στο φορτίο, και είναι :

$$P_{tot} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(VI_L^*\right) = \frac{1}{2}\frac{|V|^2\left(R_L + R_A\right)}{|Z_L + Z_A|^2}, P_R = \frac{1}{2}|I_L|^2 R_L = \frac{1}{2}\frac{|V|^2 R_L}{|Z_L + Z_A|^2} \tag{2.4.5}$$

Υπό την συμβατότητα της συνθήκης συζυγίας $Z_L = Z_A^*$, βρίσκουμε την μέγιστη ισχύ που φθάνει στο φορτίο :

$$\boxed{P_{R,\max} = \frac{|V|^2}{8R_A}} \tag{2.4.6}$$

Εάν το φορτίο και η κεραία είναι ασύμβατες, τότε έχουμε :

$$P_R = \frac{|V|^2}{8R_A}\frac{4R_A R_L}{|Z_L + Z_A|^2} = P_{R,\max}\left(1 - |\Gamma_{load}|^2\right), \Gamma_{load} = \frac{Z_L - Z_A^*}{Z_L + Z_A} \tag{2.4.7}$$

Είναι δελεαστικό να προσπαθήσουμε να αναπαραστήσουμε την ισχύ που καταναλώνεται στη εσωτερική αντίσταση του κυκλώματος Thevenin της κεραίας δέκτη, (στο Z_A), αναπαριστάνοντας το ποσό της ισχύος που ανακλάται ή διασκορπίζεται από την κεραία. Εντούτοις, αναφερόμενοι στις γνωστές κεραίες ελάχιστων απωλειών, τέτοιου είδους αναπαράσταση δεν είναι σωστή.

2.5 Ενεργό Μήκος

Οι ιδιότητες πολικότητας του ηλεκτρικού πεδίου που εκπέμπεται από μια κεραία εξαρτώνται από τον κάθετο όρο του διανύσματος ακτινοβολίας $F_\perp$, σύμφωνα με τη εξίσωση (2.10.5):

$$E = -jk\eta\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}F_\perp = -jk\eta\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\left(F_\theta\hat{\theta} + F_\phi\hat{\phi}\right)$$

Ο όρος ενεργό μήκος ή ενεργό ύψος μια εκπέμπουσας κεραίας ορίζεται ως συνάρτηση του $F_\perp$ και της εντάσεως εισόδου στους ακροδέκτες της κεραίας, I_{in} ως ακολούθως:

$$h = -\frac{F_{\perp}}{I_{in}} \tag{2.5.1}$$

Γενικά, *h* είναι η συνάρτηση των θ, φ. Το ηλεκτρικό πεδίο τότε γράφεται ως εξής:

$$E = jk\eta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I_{in} h \tag{2.5.2}$$

Ο ορισμός του *h* παράγεται από την περίπτωση μιας κεραίας ερτζιανού δίπολου, κατευθύνσεως z, κάτι που μπορεί να φανεί αφού $h = I \sin\theta \hat{\theta}$. Γενικότερα για μια γραμμική κεραία z κατευθύνσεως με ένταση *I(z),* η εξίσωση (3.1.5) δίνει:

$$h(\theta) = h(\theta)\hat{\theta}, \qquad h(\theta) = \sin\theta \frac{1}{I_{in}} \int_{-I/2}^{I/2} I(z') e^{jkz'\cos\theta} dz' \tag{2.5.3.}$$

Ως συνέπεια της αρχής της αμοιβαιότητας, μπορεί να αποδειχθεί το δυναμικό του ανοιχτού κυκλώματος V στους ακροδέκτες μιας κεραίας δέκτη, δίνεται σε συνάρτηση του ενεργού μήκους και του επικείμενου πεδίου E_i :

$$V = E_i \cdot h \tag{2.5.4.}$$

Ο φυσικός ορισμός της ενεργής περιοχής μιας κεραίας και το αποτέλεσμα $G = 4\pi A/\lambda^2$ εξαρτώνται από τα συμπεράσματα ότι η κεραία – δέκτης είναι συνδεδεμένη με το φορτίο της και ότι η πολικότητα του επικείμενου κύματος είναι η ίδια με αυτή της κεραίας.

Το ενεργό μήκος βοηθάει να χαρακτηρίσουμε το βαθμό διαφορετικότητας της πολικότητας που μπορεί να υπάρχει μεταξύ του επικείμενου πεδίου και της κεραίας. Για να δούμε πώς θα πρέπει να τροποποιηθεί η σχέση κέρδους – περιοχής, ξεκινάμε με τον ορισμό (2.3.1) και χρησιμοποιούμε την (2.4.5):

$$A(\theta,\phi) = \frac{P_R}{P_{inc}} = \frac{\frac{1}{2} R_L |I_L|^2}{\frac{1}{2\eta}|E_i|^2} = \frac{\eta R_L |V|^2}{|Z_L + Z_A|^2 |E_i|^2} = \frac{\eta R_L |E_i \cdot h|^2}{|Z_L + Z_A|^2 |E_i|^2}$$

Έπειτα ορίζουμε την πολικότητα και εισάγουμε τους παράγοντες διαφορετικότητας ως εξής:

$$e_{pol} = \frac{|E_i \cdot h|^2}{|E_i|^2 |h|^2}$$

$$e_{load} = \frac{4R_L R_A}{|Z_L + Z_A|^2} = 1 - |\Gamma_{load}|^2, \quad \text{όπου} \quad \Gamma_{load} = \frac{Z_L - Z_A^*}{Z_L + Z_A} \tag{2.5.5}$$

Η ενεργός περιοχή μπορεί να γραφτεί τότε με τη μορφή:

$$A(\theta,\phi) = \frac{\eta |h|^2}{4R_A} e_{load} e_{pol} \tag{2.5.6}$$

Από τη άλλη χρησιμοποιώντας τις (2.1.4) και (2.4.1), το κέρδος ισχύος μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$G(\theta,\phi)=\frac{4\pi U(\theta,\phi)}{P_T}=\frac{4\pi\dfrac{\eta k^2\left|F_\perp\right|^2}{32\pi^2}}{\dfrac{1}{2}R_A\left|I_{in}\right|^2}=\frac{\pi\eta|h|^2}{\lambda^2R_A}\quad\Rightarrow\quad\frac{\eta|h|^2}{4R_A}=\frac{\lambda^2}{4\pi}G(\theta,\phi)$$

Εισάγοντας την παραπάνω στην εξίσωση (2.5.6) έχουμε την τροποποιημένη σχέση κέρδους – περιοχής:

$$\boxed{A(\theta,\phi)=e_{load}e_{pol}\frac{\lambda^2}{4\pi}G(\theta,\phi)} \qquad (2.5.7)$$

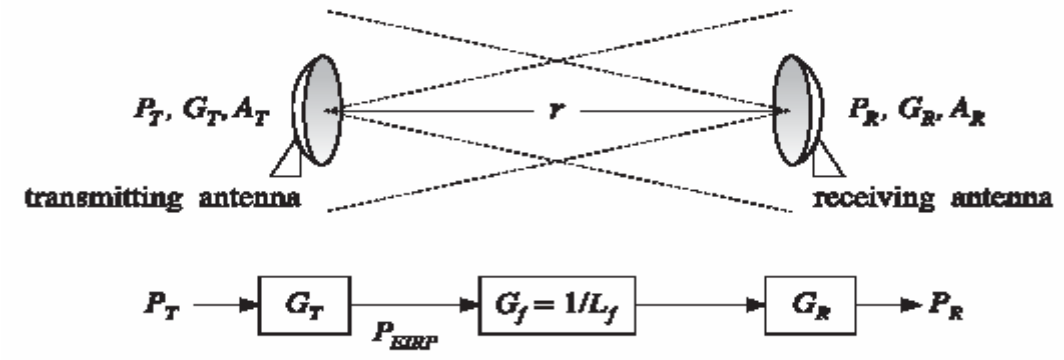
Υποθέτοντας ότι το επικείμενο πεδίο έχει σε μερικές κεραίες το δικό του ενεργό μήκος h_i και τότε μπορούμε να γράψουμε το συντελεστή διαφορετικότητας της πολικότητας με την ακόλουθη μορφή:

$$e_{pol}=\frac{|h_i\cdot h|^2}{|h_i|^2|h|^2}=\left|\hat{h}_i\cdot\hat{h}\right|^2\quad,\qquad\text{όπου}\quad\hat{h}_i=\frac{h_i}{|h_i|},\hat{h}=\frac{h}{|h|}$$

Όταν το φορτίο συνδέεται όμοια, έχουμε $e_{load}=1$, και όταν το επικείμενο πεδίο έχει όμοια πολικότητα με την κεραία, τότε, $\hat{h}_i=\hat{h}^*$ και $e_{load}=1$.

2.6 Επικοινωνούντες κεραίες

Η επικοινωνία μεταξύ μιας κεραίας πομπού και μιας κεραίας δέκτη, μπορεί να αναλυθεί με τη βοήθεια των εννοιών κέρδους και ενεργούς περιοχής. Θεωρείστε δύο κεραίες τοποθετημένες η μία απέναντι από την άλλη με κατεύθυνση του μέγιστου κέρδους της καθεμιάς και σε απόσταση r, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6.1.



Σχήμα 2.6.1: Κεραίες εκπομπής και λήψης.

Θεωρούμε $\{P_r, G_r, A_r\}$ η ισχύς, το κέρδος και η ενεργός περιοχή του πομπού και $\{P_R, G_R, A_R\}$ να είναι ίδιες ποσότητες για τον δέκτη. Στη διεύθυνση του δέκτη ο πομπός έχει $A = e_a \frac{1}{4}\pi d^2$ και καθορίζει μια πυκνότητα ισχύος σε απόσταση r:

$$P_T = \frac{dP_T}{dS} = \frac{P_{EIRP}}{4\pi r^2} = \frac{P_T G_T}{4\pi r^2} \tag{2.6.1}$$

Από την επικείμενη πυκνότητα ισχύος P_T, ο δέκτης θα έχει ισχύ P_R που δίνεται σε συνάρτηση με την ενεργό περιοχή A_R, ως εξής:

$$\boxed{P_R = A_R P_T = \frac{P_T G_T A_R}{4\pi r^2}} \tag{2.6.2}$$

Αυτό είναι γνωστό ως τύπος του Friis για τις επικοινωνούντες κεραίες και μπορεί να γραφτεί σε πολλές ισοδύναμες μορφές. Αντικαθιστώντας το G_T σε συνάρτηση με την ενεργό περιοχή A_T του πομπού, δηλαδή, $G_T = 4\pi A_T / \lambda^2$, η εξίσωση (2.6.2) γίνεται:

$$P_R = \frac{P_T A_T A_R}{\lambda^2 r^2} \tag{2.6.3}$$

Ένας καλύτερος τρόπος για να γράψουμε την εξίσωση (2.6.2) είναι ένα παράγωγο των όρων κέρδους. Αντικαθιστώντας $A_R = \lambda^2 G_R / 4\pi$, έχουμε:

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \lambda^2}{(4\pi r)^2} \tag{2.6.4}$$

Το φαινόμενο της διάθλασης το οποίο είναι η αιτία για την εξασθένιση του P_R αναλόγως με το τετράγωνο της απόστασης r, μπορεί να υπολογισθεί ορίζοντας την απώλεια στον ελεύθερο χώρο και το κέρδος με:

$$\boxed{L_f = \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2, G_f = \frac{1}{L_f} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2} \tag{2.6.5}$$

Τότε η εξίσωση (2.6.4) μπορεί να γραφτεί ως το γινόμενο των κερδών εκπομπής και λήψης και το συντελεστή απωλειών διάθλασης:

$$\boxed{P_R = P_T G_T \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 G_R = P_T G_T \frac{1}{L_f} G_R = P_T G_T G_f G_R} \tag{2.6.6}$$

Τέτοιο μοντέλο κέρδους για επικοινωνούντες κεραίες εικονίζεται στο σχήμα 2.6.1. Ένας επιπρόσθετος συντελεστής απωλειών, $G_{other} = 1/L_{other}$, μπορεί να εισαχθεί αν είναι απαραίτητο, αναπαριστάνοντας άλλου είδους απώλειες, όπως απορρόφηση της ατμόσφαιρας και

διασποράς. Είναι συνηθισμένο να εκφράζουμε την εξίσωση (2.6.6) σε dB, όπου $(P_R)_{dB} = 10\log_{10} P_R, (G_T)_{dB} = 10\log_{10} G_T$:

$$(P_R)_{dB} = (P_T)_{dB} + (G_T)_{dB} - (L_f)_{dB} + (G_R)_{dB} \quad (2.6.7)$$

Παράδειγμα 2.6.1:
Ένας γεωστατικός δορυφόρος εκπέμπει ένα σήμα τηλεόρασης σε ένα σταθμό εδάφους σε απόσταση 40000km. Υποθέστε ότι οι κεραίες πιάτα του δορυφόρου και του σταθμού εδάφους έχουν διαμέτρους 0.5m και 5m και άνοιγμα αποτελεσματικότητας 60%. Εάν η ισχύς του πομπού του δορυφόρου είναι 6W και η συχνότητα ζεύξης είναι 4GHz, υπολογίστε τα κέρδη της κεραίας σε dB και το ποσό της λαμβανόμενης ισχύος.
ΛΥΣΗ: Το μήκος κύματος των 4GHz είναι λ=7.5cm. Τα κέρδη της κεραίας υπολογίζονται από:

$$G = e_a\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad G_{sat} = 263.2 = 24dB, G_{earth} = 26320 = 44dB$$

Επειδή η αναλογία των διαμέτρων των κεραιών στη γη και στο δορυφόρο είναι το 10, το αντίστοιχο κέρδος θα διαφέρει κατά ένα ποσό της κλίμακας του 100 ή των 20 dB. Η εκπεμπόμενη ισχύς του δορυφόρου είναι σε dB, $P_T = 10\log_{10}(6) = 8dBW$ και το κέρδος και η απώλεια στον ελεύθερο χώρο είναι:

$$L_f = \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2 = 4\times 10^{19} \quad L_f = 196dB, G_f = -196dB$$

Οπότε η λαμβανόμενη ισχύς θα είναι σε dB:

$$P_R = P_T + G_T - L_f + G_R = 8 + 24 - 196 + 44 = -120dBW \quad \Rightarrow \quad P_R = 10^{-12}W$$

έτσι, η λαμβανόμενη ισχύς είναι πάρα πολύ μικρή.

Όταν οι δύο κεραίες δεν έχουν την ίδια πολικότητα με ένα συντελεστή διαφορετικότητας $e_{pol} = \left|\hat{h}_R \cdot \hat{h}_T\right|^2$, και η κεραία δέκτης δεν ταιριάζει με το φορτίο της με $e_{load} = 1 - |\Gamma_{load}|^2$, τότε ο τύπος του Friis (2.6.2) ισχύει ακόμη, αλλά αντικαθιστώντας το A_R από την εξίσωση (2.5.7) οδηγούμαστε σε μια τροποποιημένη μορφή της εξίσωσης (14.6.4):

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R \lambda^2}{(4\pi r)^2}\left|\hat{h}_R \cdot \hat{h}_T\right|^2 \left(1 - |\Gamma_{load}|^2\right) \quad (2.6.8)$$

2.7 Θερμοκρασία θορύβου κεραίας

Είδαμε στο παραπάνω παράδειγμα ότι το λαμβανόμενο σήμα από ένα γεωστατικό δορυφόρο είναι πολύ ασθενές, της τάξης των picowatts, εξαιτίας της τεράστιας απώλειας στον ελεύθερο χώρο, η οποία είναι τυπικά της τάξης των 200 dB.

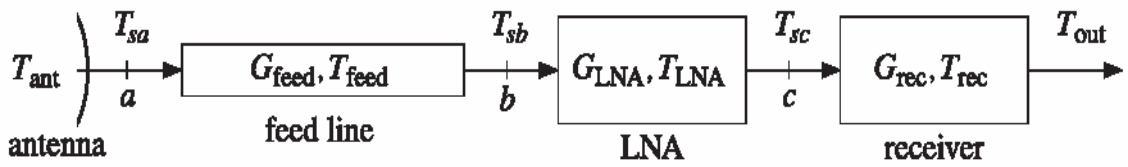
Για να μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε ένα τόσο αδύναμο σήμα πρέπει το σύστημα του δέκτη να διατηρεί ένα επίπεδο θορύβου χαμηλότερο από το λαμβανόμενο σήμα. Ο θόρυβος παράγεται μέσα στο σύστημα του δέκτη από πολλές πηγές.

Επιπρόσθετα, στο επιθυμητό σήμα, ο δέκτης λαμβάνει θορυβώδη σήματα από τον ουρανό, το έδαφος, τον καιρό και άλλες φυσικές ή τεχνητές πηγές θορύβου. Αυτά τα σήματα θορύβου που προέρχονται από διαφορετικές κατευθύνσεις υπολογίζονται σύμφωνα με το κέρδος της κεραίας σε ένα μέσο θόρυβο στην έξοδο του τερματικού της κεραίας. Για παράδειγμα, αν η κεραία είναι στραμμένη προς τον ουρανό, ακόμη θα λαμβάνει μερικά ανακλώμενα σήματα από τους πλευρικούς λοβούς της καθώς και θερμικών θορύβων από το έδαφος. Οι ωμικές απώλειες στη κεραία είναι άλλη μία πηγή θορύβου.

Η έξοδος της κεραίας διοχετεύεται μέσω ενός αγωγού (όπως ένας κυματοδηγός ή γραμμή μεταφοράς) στα κυκλώματα του δέκτη. Ο αγωγός έχοντας απώλειες θα ασθενήσει περαιτέρω το σήμα και επίσης θα αναπτύξει το δικό του θερμικό θόρυβο. Η έξοδος του αγωγού στέλνεται σε έναν ενισχυτή χαμηλού θορύβου (Low Noise Amplifier – LNA), ο οποίος προενισχύει το σήμα και παράγει μόνο ένα μικρό ποσό θερμικού θορύβου. Η φύση του LNA ως αγωγού χαμηλού θορύβου είναι σημαντική ιδιότητα του συστήματος του δέκτη.

Η έξοδος του LNA περνάει στο υπόλοιπο σύστημα του δέκτη, το οποίο αποτελείται από διαιρέτες, ενισχυτές IF και άλλα. Αυτά τα υποσυστήματα έχουν τους δικούς τους όρους κέρδους και θερμικού θορύβου.

Ένα τέτοιο σύστημα δέκτη εικονίζεται στο σχήμα 2.7.1. Το σύνολο όλων των θορύβων που παράγονται από τα υποσυγκροτήματα πρέπει να διατηρείται σε αποδεκτά χαμηλά επίπεδα (σε σχέση με το ενισχυμένο επιθυμητό σχήμα).



<u>Σχήμα 2.7.1:</u> Τυπικό σύστημα κεραίας λήψης.

Η μέση ισχύς N (σε Watts) μιας πηγής θορύβου μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλάτος κύματος BHz μπορεί να υπολογιστεί σε μια συνάρτηση μιας ισοδύναμης θερμοκρασίας T που ορίζεται ως εξής:

$$N = kTB \tag{2.7.1}$$

όπου k είναι η σταθερά Boltzmann $k = 1.3803 \times 10^{-23} W/HzK$ και T είναι σε βαθμούς Kelvin. Η θερμοκρασία T δεν είναι απαραίτητα η φυσική θερμοκρασία της πηγής, απλά δίνει ένα βολικό τρόπο να εκφράσουμε την ισχύ του θορύβου. (Για μια θερμική πηγή, T είναι πραγματικά η φυσική θερμοκρασία). Η εξίσωση (2.7.1) συνήθως εκφράζεται σε dB:

$$N_{dB} = T_{dB} + B_{dB} + k_{dB} \tag{2.7.2}$$

όπου $T_{dB} = 10\log_{10} T, B_{dB} = 10\log_{10} B, k_{dB} = 10\log_{10} k$ είναι η σταθερά Boltzmann σε dB: $k_{dB} = -228.6dB$. Κατά κάποιο τρόπο λανθασμένα, αλλά πολύ υποθετικά, οι παρακάτω μονάδες χρησιμοποιούνται στη πράξη για τους διάφορους όρους στη εξίσωση (2.7.2):

$$dBW = dBK + dBHz + dBW/HzK$$

Το πλάτος κύματος B εξαρτάται από τη εφαρμογή. Για παράδειγμα οι δορυφορικές εκπομπές σημάτων τηλεόρασης απαιτούν πλάτος περίπου 30 MHz. Οι μικροκυματικές ζεύξεις επιφανείας μπορούν να έχουν B της τάξης των 60MHz. Στα κυψελωτά συστήματα μπορεί να έχουμε B της τάξης των 30KHz για το σύστημα AMPS ή 200KHz για το σύστημα GSM.

Παράδειγμα 2.7.1:
Υποθέτοντας ότι έχουμε πλάτος 30MHz δίνουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα ισχυόντων θορύβων και θερμοκρασιών και υπολογίζουμε τον αντίστοιχο λόγο σήματος προς θόρυβο με βάση ένα σήμα 1pW.

T	T_{dB}	$N = kTB$	N_{dB}	S/N
50 K	17.0 dBK	0.0207 pW	-136.8 dBW	16.8 dB
100 K	20.0 dBK	0.0414 pW	-133.8 dBW	13.8 dB
200 K	23.0 dBK	0.0828 pW	-130.8 dBW	10.8 dB
290 K	24.6 dBK	0.1201 pW	-129.2 dBW	9.2 dB
500 K	27.0 dBK	0.2070 pW	-126.8 dBW	6.8 dB
1000 K	30.0 dBK	0.4141 pW	-123.8 dBW	3.8 dB
2400 K	33.8 dBK	1.0000 pW	-120.0 dBW	0.0 dB

Η μέση ισχύς θορύβου N_{ant} στα τερματικά της κεραίας χαρακτηρίζεται από μια ισοδύναμη κεραία θερμοκρασίας θορύβου T_{ant} , έτσι ώστε $N_{ant} = kT_{ant}B$.

Η θερμοκρασία T_{ant} αναπαριστά τις υπολογιζόμενες συνεισφορές όλων των πηγών εκπομπής θορύβων που λαμβάνεται από την κεραία, μέσω του κυρίως και των πλευρικών λοβών της. Η τιμή T_{ant} εξαρτάται πρωταρχικά από την προέλευση και την γωνία ανίχνευσης της κεραίας και του τι κοιτάζει η κεραία.

Παράδειγμα 2.7.2:
Μια κεραία στη γη κοιτάζει στον ουρανό και έχει θερμοκρασία θορύβου T_{ant} της τάξης των 30-60K. Από αυτά περίπου 10K λαμβάνονται από τον κυρίως λοβό και τους πλευρικούς λοβούς που κοιτάζουν προς τον ουρανό και 20-40K από τους πλευρικούς λοβούς που κοιτάζουν προς το έδαφος. Στην περίπτωση βροχερού καιρού το T_{ant} μπορεί να αυξηθεί ως και 60K ή και περισσότερο.

Η θερμοκρασία θορύβου του ουρανού εξαρτάται από τη γωνία ανύψωσης της κεραίας. Για παράδειγμα σε γωνίες ανύψωσης των 5^o, 10^o και 30^o η θερμοκρασία είναι περίπου 20K, 10K και 4K στα 4GHz και 25K, 12K και 5K στα 6GHz.

Παράδειγμα 2.7.3:
Η θερμοκρασία θορύβου της γης, όπως φαίνεται από το διάστημα, όπως από ένα δορυφόρο, είναι περίπου 254K. Αυτό υπολογίζεται εξισώνοντας την ενέργεια του ήλιου που απορροφάται από τη γη με τη θερμική ακτινοβολία της γης.

Παράδειγμα 2.7.4:
Για ένα σταθμό βάσης κυψελωτής κεραίας που κοιτάζει οριζόντια η ατμοσφαιρική θερμοκρασία θορύβου, συνεισφέρει περίπου 70-100K στην κυψελωτή συχνότητα του 1GHz και ο τεχνητός θόρυβος συνεισφέρει άλλα 10 – 120K που εξαρτάται από την περιοχή (αστική ή αγροτική). Η συνολική τιμή του T_{ant} για κυψελωτά συστήματα είναι της τάξης των 100-200K.

Γενικά, μια πηγή θορύβου σε διεύθυνση (θ,φ) θα χαρακτηρίζεται από μια θερμοκρασία θορύβου $T(\theta,\varphi)$ γνωστή ως brightness temperature ώστε η εκπεμπόμενη ισχύς θορύβου σε αυτήν τη διεύθυνση θα είναι $N(\theta,\phi)=kT(\theta,\phi)B$. Η θερμοκρασία της κεραίας T_{ant} θα δίνεται από το μέσο όρο όλων των πηγών που συνυπολογίζονται από το λαμβανόμενο κέρδος της κεραίας:

$$\boxed{T_{ant}=\frac{1}{\Delta\Omega}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}T(\theta,\phi)g(\theta,\phi)d\Omega} \qquad (2.7.3)$$

όπου ΔΩ είναι η στερεά γωνία δέσμης ακτινοβολίας της κεραίας. Από την εξίσωση (2.2.15) έχουμε ότι το ΔΩ είναι ένας όρος κανονικοποίησης του μέσου όρου:

$$\Delta\Omega=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}g(\theta,\phi)d\Omega \qquad (2.7.4)$$

Η εξίσωση (2.7.3) μπορεί επίσης να γραφτεί στις παρακάτω ισοδύναμες μορφές σε συνάρτηση του κατευθυντικού κέρδους ή της ενεργούς περιοχής της κεραίας:

$$T_{ant}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}T(\theta,\phi)D(\theta,\phi)d\Omega=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}T(\theta,\phi)A(\theta,\phi)d\Omega$$

Ένα παράδειγμα της εξίσωσης (2.7.3), θεωρούμε την περίπτωση μιας πηγής σημείου, όπως είναι ο ήλιος, το φεγγάρι, ένας πλανήτης ή ένας ακτινοβολών αστέρας. Τότε η εξίσωση (2.7.3) δίνει:

$$T_{ant}=T_{po\,\mathrm{int}}\frac{g_{po\,\mathrm{int}}\Delta\Omega_{po\,\mathrm{int}}}{\Delta\Omega}$$

όπου $g_{po\,\mathrm{int}}$ και $\Delta\Omega$ είναι το κέρδος της κεραίας στη διεύθυνση της πηγής και η μικρή στερεά γωνία που υπόκειται από την πηγή. Εάν ο κυρίως λοβός της κεραίας δείχνει κατακόρυφα στην πηγή τότε, $g_{po\,\mathrm{int}}=1$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η περίπτωση μιας χωροταξικά διευρυμένης πηγής θορύβου, όπως ο ουρανός, ο οποίος υποθέτουμε ότι έχει σταθερά θερμοκρασίας T_{ext} κατά το γωνιακό πλάτος. Τότε η εξίσωση (2.7.3) γίνεται:

$$T_{ant}=T_{ext}\frac{\Delta\Omega_{ext}}{\Delta\Omega} \quad , \qquad \text{όπου} \quad \Delta\Omega_{ext}=\int_{ext}g(\theta,\phi)d\Omega$$

Η ποσότητα $\Delta\Omega_{ext}$ είναι η αναλογία της στερεάς γωνίας της κεραίας που καταλαμβάνεται από τη διευρυμένη πηγή.

Ένα τρίτο παράδειγμα είναι η περίπτωση μιας κεραίας στραμμένης προς τον ουρανό που λαμβάνει τον ατμοσφαιρικό θόρυβο από τον κυρίως λοβό της και μερικώς από τους πλευρικούς και που λαμβάνει θόρυβο από το έδαφος μέσω των υπολοίπων λοβών της. Υποθέτοντας τη θερμοκρασία θορύβου ουρανού και εδάφους ομοιόμορφη σε όλο το χωροταξικό εύρος της, η εξίσωση (2.7.3) θα γίνει:

$$T_{ant}=T_{sky}\frac{\Delta\Omega_{sky}}{\Delta\Omega}+T_{ground}\frac{\Delta\Omega_{ground}}{\Delta\Omega}$$

όπου $\Delta\Omega_{sky}$ και $\Delta\Omega_{ground}$ είναι τα ποσοστά της στερεάς γωνίας δέσμης που καταλαμβάνονται από τον ουρανό και το έδαφος :

$$\Delta\Omega_{sky} = \int_{sky} g(\theta,\phi)d\Omega \quad , \qquad \Delta\Omega_{ground} = \int_{ground} g(\theta,\phi)d\Omega$$

Η συνολική στερεά γωνία δέσμης που προκύπτει από τις στερεές γωνίες ουρανού και εδάφους είναι

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_{sky} + \Delta\Omega_{ground}$$

Οι ρυθμοί μεταβολής της αποτελεσματικότητας της δέσμης του ουρανού και του εδάφους μπορούν να ορισθούν ως εξής:

$$e_{sky} = \frac{\Delta\Omega_{sky}}{\Delta\Omega} \quad , \quad e_{ground} = \frac{\Delta\Omega_{ground}}{\Delta\Omega} \quad , \quad e_{sky} + e_{ground} = 1$$

Τότε, η θερμοκρασία θορύβου της κεραίας μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$\boxed{T_{ant} = e_{sky}T_{sky} + e_{ground}T_{ground}} \qquad (2.7.5)$$

Παράδειγμα 2.7.5:

Στα 4GHz και με γωνία ανύψωσης 30^o , η θερμοκρασία θορύβου του ουρανού είναι περίπου 4K. Υποθέτοντας ότι η θερμοκρασία εδάφους είναι περίπου 290K και ότι το 90% της στερεάς γωνίας δέσμης είναι προς τον ουρανό και 10% προς το έδαφος, υπολογίζουμε τη θερμοκρασία της κεραίας:

$$T_{ant} = e_{sky} + e_{ground}T_{ground} = 0.9\times 4 + 0.1\times 290 = 32.6K$$

Εάν το ποσοστό της δέσμης μεταβληθεί στο 85% προς τον ουρανό τότε $e_{sky} = 0.85, e_{ground} = 0.15$ και έχουμε $T_{ant} = 46.9K$.

Οι αποτελεσματικότητες δέσμης του κυρίως και του πλευρικού λοβού μιας κεραίας αντιστοιχούν στα ποσοστά που καταλαμβάνουν αυτοί της στερεάς γωνίας δέσμης. Οι αντίστοιχες γωνίες δέσμης ορίζονται ως εξής:

$$\Delta\Omega = \int_{tot} g(\theta,\phi)d\Omega = \int_{main} g(\theta,\phi)d\Omega + \int_{side} g(\theta,\phi)d\Omega = \Delta\Omega_{main} + \Delta\Omega_{side}$$

Έτσι, οι αποτελεσματικότητες δέσμης θα είναι:

$$e_{main} = \frac{\Delta\Omega_{main}}{\Delta\Omega} \quad , \quad e_{side} = \frac{\Delta\Omega_{side}}{\Delta\Omega} \quad , \quad e_{main} + e_{side} = 1$$

Υποθέτοντας ότι ολόκληρος ο κυρίως λοβός και ένα τμήμα, ας πούμε α, του πλευρικού λοβού δείχνουν προς τον ουρανό, και οπότε, ένα τμήμα (1-α) των πλευρικών λοβών θα δείχνουν προς το έδαφος, μπορούμε να εκφράσουμε τις στερεές γωνίες ουρανού και εδάφους ως εξής:

$$\Delta\Omega_{sky} = \Delta\Omega_{main} + a\Delta\Omega_{side}$$

$$\Delta\Omega_{ground} = (1-a)\Delta\Omega_{side}$$

ή σε συνάρτηση των παραγόντων αποτελεσματικότητας:

$$e_{sky} = e_{main} + ae_{side} = e_{main} + a(1-e_{main})$$

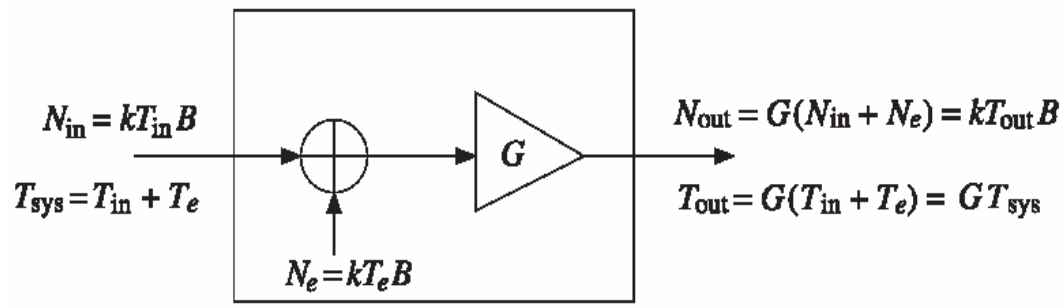
$$e_{ground} = (1-a)e_{side} = (1-a)(1-e_{main})$$

Παράδειγμα 2.7.6:
Υποθέτοντας ότι το 80% του κυρίως λοβού και το μισό των πλευρικών λοβών δείχνουν προς τον ουρανό και το άλλο μισό προς το έδαφος, έχουμε e_{main} = 0.8 και α = 0.5, τα οποία οδηγούν στην e_{sky} = 0.9.

2.8 Σύστημα Θερμοκρασίας Θορύβου

Σε ένα σύστημα κεραίας δέκτη, ο λόγος σήματος προς θόρυβο στον δέκτη, υπολογίζεται με βάση όχι μόνο το θόρυβο στην κεραία δηλαδή από το T_{ant} , αλλά και από τους εσωτερικούς θορύβους που παράγονται από τα διάφορα υποσυγκροτήματα του δέκτη.

Κάθε συσκευή, παθητική ή ενεργητική, είναι πηγή θορύβου που παράγεται εσωτερικά. Τέτοιοι θόρυβοι μπορούν να τυποποιηθούν ως εσωτερικές πηγές που ενεργούν στη είσοδο της συσκευής, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8.1. (Εναλλακτικά, η πηγή θορύβου μπορεί να προστεθεί στην έξοδο, αλλά η συνθήκη της εισόδου είναι πιο κοινή).



Σχήμα 2.8.1: Μοντέλο θορύβου μιας συσκευής.

Η ποσότητα της προστιθέμενης ισχύος θορύβου εκφράζεται σε συνάρτηση της θερμοκρασίας θορύβου της συσκευής T_e:

$$\boxed{N_e = kT_eB} \qquad (2.8.1)$$

Το άθροισμα του N_e και της ισχύος θορύβου του εισερχόμενου σήματος N_{in}, θα είναι η συνολική ισχύς θορύβου ή η ισχύς θορύβου του συστήματος στην είσοδο της συσκευής. Εάν ο θόρυβος εισόδου εκφραστεί σε συνάρτηση με τη δική του θερμοκρασία, $N_{in} = kT_{in}B$, θα έχουμε:

$$N_{sys} = N_{in} + N_e = k(T_{in} + T_e)B = kT_{sys}B \qquad (2.8.2)$$

όπου εισάγουμε τη θερμοκρασία θορύβου του συστήματος στην είσοδο της συσκευής:

$$\boxed{T_{sys} = T_{in} + T_e} \qquad (2.8.3.)$$

Εάν η συσκευή έχει κέρδος ισχύος G τότε η ισχύς θορύβου στην είσοδο της συσκευής και η αντίστοιχη θερμοκρασία, $N_{out} = kT_{out}B$, μπορούν να εκφραστούν ως ακολούθως:

$$N_{out} = G\left(N_{in} + N_e\right) = GN_{sys}$$
$$T_{out} = G\left(T_{in} + T_e\right) = GT_{sys} \qquad (2.8.4)$$

Μια παρουσίαση της ισχύος θορύβου του συστήματος $N_{sys} = kT_{sys}B$ είναι ότι αυτή αναπαριστά την απαιτούμενη ισχύ εισόδου σε ένα ισοδύναμο σύστημα χωρίς θόρυβο (με το ίδιο κέρδος) το οποίο θα παράγει την ίδια ισχύ εξόδου με το πραγματικό σύστημα με θόρυβο.

Εάν ένα επιθυμητό σήμα με ισχύ θορύβου S_{in} είναι επίσης είσοδος στη συσκευή, τότε η ισχύς του σήματος στην έξοδο θα είναι $S_{out} = GS_{in}$. Ο λόγος σήματος προς θόρυβο του συστήματος ορίζεται να είναι ο λόγος της ισχύος του σήματος στην είσοδο προς το σύνολο της ισχύος θορύβου του συστήματος:

$$\boxed{SNR_{sys} = \frac{S_{in}}{N_{sys}} = \frac{S_{in}}{kT_{sys}B} = \frac{S_{in}}{k\left(T_{in} + T_e\right)B}} \quad \text{(σύστημα SNR)} \qquad (2.8.5)$$

Το SNR είναι ίδιο είτε μετρηθεί στη είσοδο, είτε στην έξοδο της συσκευής. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με το G και χρησιμοποιώντας τη (2.8.4) έχουμε:

$$SNR_{sys} = \frac{S_{in}}{N_{sys}} = \frac{S_{out}}{N_{out}} \qquad (2.8.6)$$

Μια σχετική αντίληψη είναι η τιμή θορύβου της συσκευής η οποία επίσης χαρακτηρίζει τον εσωτερικά παραγόμενο θόρυβο. Σχετίζεται με τη θερμοκρασία θορύβου T_e με τη σχέση:

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad \Leftrightarrow \quad T_e = \left(F - 1\right)T_0 \qquad (2.8.7)$$

όπου T_0 είναι η σταθερά της θερμοκρασίας T_0 = 290K.

Η συσκευή του σχήματος 2.8.1 μπορεί να είναι είτε ενεργητική είτε παθητική. Η περίπτωση ενός παθητικού εξασθενητή, όπως μια γραμμή μεταφοράς με απώλειες ή ένας κυματοδηγός που συνδέει την κεραία με το δέκτη, χρειάζεται ειδική πραγμάτευση.

Σε αυτήν την περίπτωση το κέρδος G θα είναι μικρότερο της μονάδας $G<1$, και θα αναπαριστά κάποια απώλεια ισχύος. Για μια γραμμή μήκους l και σταθερά εξασθένησης α (nepers ανά μέτρο), θα έχουμε $G = e^{-2al}$. Ο αντίστοιχος όρος απωλειών θα είναι $L = G^{-1} = e^{2al}$. Εάν $\Delta\Omega = \int_{\Delta\Omega} g(\theta,\phi)\,d\Omega$, μπορούμε να γράψουμε προσεγγιστικά $G = 1 - 2al$ και $L = 1 + 2al$.

Εάν η φυσική θερμοκρασία της γραμμής είναι T_{phys} τότε, είτε στην είσοδο είτε στην έξοδο, η γραμμή θα εμφανίζεται σαν μια πηγή θερμικού θορύβου ισχύος $kT_{phys}B$. Έτσι, η συνθήκη $N_{in} = N_{out} = kT_{phys}B$ εισάγει ότι $kT_{phys}B = Gk\left(T_{phys} + T_e\right)B$, η οποία δίνει:

$$\boxed{T_e = \frac{1}{G}(1-G)T_{phys} = (L-1)T_{phys}} \tag{2.8.8}$$

Εάν η φυσική θερμοκρασία είναι $T_{phys} = T_0 = 290K$, τότε συγκρίνοντας με την εξίσωση (2.8.7) έχουμε ότι η τιμή θορύβου του εξασθενητή θα είναι ίση με τις απώλειές του:

$$T_e = (L-1)T_0 = (F-1)T_0 \quad \Rightarrow \quad F = L = \frac{1}{G}$$

Όταν η είσοδος του εξασθενητή είναι μια εσωτερική πηγή θορύβου ισχύος $N_{in} = kT_{in}B$, η θερμοκρασία θορύβου του συστήματος στην είσοδο και την έξοδο του εξασθενητή θα είναι:

$$\begin{aligned} T_{sys} &= T_{in} + T_e = T_{in} + (L-1)T_{phys} \\ T_{out} &= GT_{sys} = GT_{in} + (1-G)T_{phys} = \frac{1}{L}T_{in} + \left(1-\frac{1}{L}\right)T_{phys} \end{aligned} \tag{2.8.9}$$

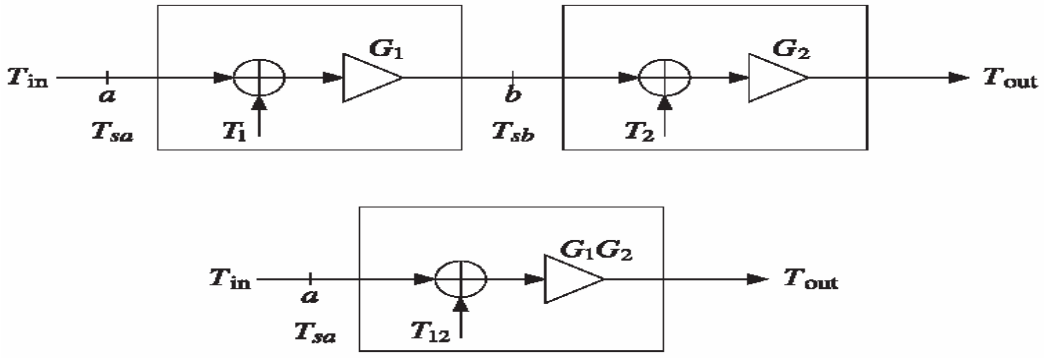
Η τελευταία εξίσωση μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση των ισχύων εισόδου και εξόδου $N_{in} = kT_{in}B$ και $N_{out} = kT_{out}B$:

$$N_{out} = \frac{1}{L}N_{in} + \left(1-\frac{1}{L}\right)kT_{phys}B \tag{2.8.10}$$

Έτσι, η ισχύς εισόδου υποβιβάζεται όπως προβλέπεται, αλλά ο εξασθενητής προσθέτει το δικό του θερμικό θόρυβο, σε αυτή. Γενικότερα, εάν η ισχύς εισόδου δημιουργείται από το σήμα συν το θόρυβο $P_{in} = S_{in} + N_{in}$, η ισχύς στην έξοδο θα είναι $P_{out} = S_{out} + N_{out} = GS_{in} + N_{out}$:

$$P_{out} = \frac{1}{L}P_{in} + \left(1-\frac{1}{L}\right)kT_{phys}B \tag{2.8.11}$$

Όταν δυο ή περισσότερες συσκευές συνδέονται, καθεμιά θα συνεισφέρει το δικό της εσωτερικό θόρυβο. Το σχήμα 2.8.2 δείχνει δυο τέτοιες συσκευές με κέρδη G_1 και G_2 και θερμοκρασία θορύβου T_1 και T_2 . Ο συνδυασμός αυτών μπορεί να αντικατασταθεί από μια ισοδύναμη συσκευή με κέρδος G_1 G_2 και θερμοκρασία θορύβου T_{12}.



Σχήμα 2.8.2 Μοντέλο ισοδύναμου θορύβου δύο διαδοχικών συσκευών.

Η ισοδύναμη θερμοκρασία T_{12} μπορεί να υπολογιστεί από τις άλλες δυο. Ο εσωτερικός θόρυβος που προστίθεται από την πρώτη συσκευή, $N_1 = kT_1B$, θα περάσει από τα κέρδη G_1 και G_2 , δίνοντας στην έξοδο $G_1G_2N_1$. Ο θόρυβος που παράγεται από τη δεύτερη συσκευή, $N_2 = kT_2B$, θα δώσει $G_2 N_2$. Το άθροισμα αυτών των δυο θα είναι η συνολική ισχύς θορύβου του συνδυασμού στην έξοδο $G_1G_2N_{12} = G_1G_2kT_{12}B$. Έτσι,

$$G_1G_2kT_{12}B = G_1G_2kT_1B + G_2kT_2B \quad \Rightarrow \quad G_1G_2T_{12} = G_1G_2T_1 + G_2T_2$$

Ακολουθεί ότι:

$$\boxed{T_{12} = T_1 + \frac{1}{G_1}T_2} \tag{2.8.12}$$

Εάν το G_1 είναι μεγάλο κέρδος, $G_1 >> 1$, τότε η συνεισφορά της δεύτερης συσκευής στο θόρυβο μειώνεται δραματικά. Από την άλλη, εάν η πρώτη συσκευή είναι ένας εξασθενητής όπως μια γραμμή μεταφοράς, τότε η συνεισφορά του T_2 θα ενισχυθεί επειδή $G_1 <1$.

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.8.3) και (2.8.4), οι θερμοκρασίες θορύβου του συστήματος της συνολικής εισόδου στην έξοδο του G_1 , και στη συνολική έξοδο θα είναι:

$$\begin{aligned} T_{sys} = T_{sa} = T_{in} + T_{12} = T_{in} + T_1 + \frac{1}{G_1}T_2 \\ T_{sb} = G_1T_{sa} = G_1\left(T_{in} + T_1\right) + T_2 \\ T_{out} = G_2T_{sb} = G_1G_2T_{sys} = G_1G_2\left(T_{in} + T_1\right) + G_2T_2 \end{aligned} \tag{2.8.13}$$

Το SNR του συστήματος θα είναι:

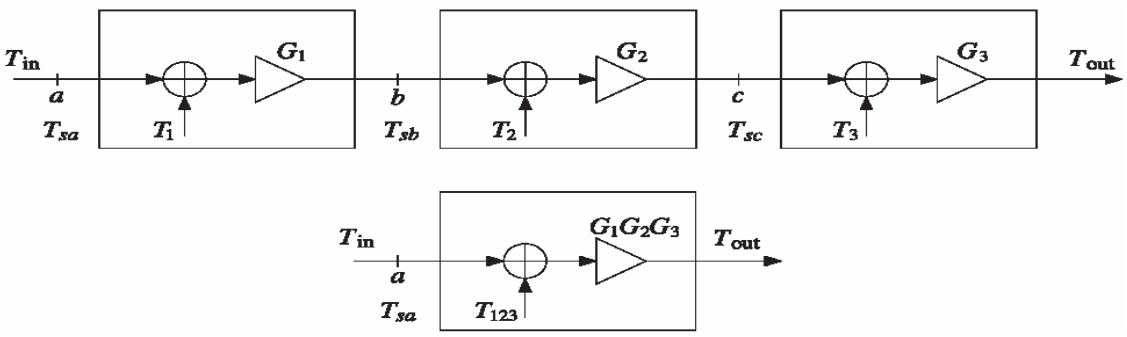
$$SNR_{sys}\frac{S_{in}}{kT_{sys}B} = \frac{S_{in}}{k\left(T_{in} + T_{12}\right)B}$$

Οι ισχύεις του σήματος στα σημεία a, b στην έξοδο θα είναι $S_a = S_{in}, S_b = G_1S_a,$ και $S_{out} = G_2S_b = G_1G_2S_a$. Από την εξίσωση (2.8.13) έχουμε ότι το SNR του συστήματος θα είναι το ίδιο, ανεξάρτητα αν αναφέρεται στο σημείο a, στο σημείο b και στη συνολική έξοδο:

$$SNR_{sys} = SNR_a = SNR_b = SNR_{out}$$

Για τρεις συνδεδεμένες συσκευές όπως φαίνεται στο σχήμα 2.8.3, ανά δύο μπορούν να αντικατασταθούν από τις ισοδύναμές τους, σύμφωνα με την εξίσωση (2.8.12). Για παράδειγμα, οι δύο πρώτες μπορούν να αντικατασταθούν από το T_{12} και αυτή συνδυασμένη με το T_3 να δώσουν τη συνολική ισοδύναμη θερμοκρασία :

$$T_{12} = T_1 + \frac{1}{G_1}T_2, \qquad T_{123} = T_{12} + \frac{1}{G_1G_2}T_3$$



Σχήμα 2.8.3 Ισοδύναμη θερμοκρασία θορύβου τριών διαδοχικών συσκευών.

Διαφορετικά, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις δύο τελευταίες με μια ισοδύναμη θερμοκρασία T_{23} και να συνδυάσουμε αυτή με την πρώτη:

$$T_{23} = T_2 + \frac{1}{G_2} T_3, \qquad T_{123} = T_1 + \frac{1}{G_1} T_{23}$$

Και στις δύο περιπτώσεις παίρνουμε την ισοδύναμη θερμοκρασία:

$$\boxed{T_{123} = T_1 + \frac{1}{G_1} T_2 + \frac{1}{G_1 G_2} T_3} \qquad (2.8.14)$$

Το SNR του συστήματος θα είναι:

$$SNR_{sys} = \frac{S_{in}}{kT_{sys}B} = \frac{S_{in}}{k\left(T_{in} + T_{123}\right)B}$$

Και είναι ανεξάρτητο από το σημείο αναφοράς του:

$$SNR_{sys} = SNR_a = SNR_b = SNR_c = SNR_{out}$$

Όταν εκφράζεται σε συνάρτηση των τιμών θορύβου, οι εξισώσεις (2.8.12) και (2.8.14) είναι επίσης γνωστές ως τύποι του Friis, για παράδειγμα, ορίζοντας την ισοδύναμη τιμή θορύβου ως $F_{123} = 1 + T_{123}/T_0$, έχουμε:

$$\boxed{F_{123} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2}} \qquad (2.8.15)$$

Εφαρμόζοντας, τώρα αυτά τα αποτελέσματα στο δέκτη της κεραίας του σχήματος 2.7.1, θεωρώντας τις τρεις συνδεδεμένες συσκευές ως είσοδο, του LNA ενισχυτή, και τα υπόλοιπα από τα κυκλώματα του δέκτη, και έχοντας τις αντίστοιχες θερμοκρασίες θορύβου να είναι T_{feed} , T_{LNA} και T_{rec} , έχουμε τη θερμοκρασία θορύβου T_{eff} του συστήματος:

$$T_{eff} = T_{feed} + \frac{1}{G_{feed}} T_{LNA} + \frac{1}{G_{feed} G_{LNA}} T_{rec} \tag{2.8.16}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.8.8) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το T_{feed} σε συνάρτηση της φυσικής θερμοκρασίας:

$$T_{eff} = \frac{1}{G_{feed}} \left(1 - G_{feed}\right) T_{phys} + \frac{1}{G_{feed}} T_{LNA} + \frac{1}{G_{feed} G_{LNA}} T_{rec} \tag{2.8.17}$$

Η θερμοκρασία θορύβου της εισόδου T_{in} αυτού του συστήματος είναι η θερμοκρασία της κεραίας T_{ant}. Ακολουθεί ότι η θερμοκρασία του συστήματος, αναφερόμενη είτε στην έξοδο είτε της κεραίας (σημείο α), είτε στην είσοδο του LNA (σημείο *b*), θα είναι:

$$T_{sys} = T_{sa} = T_{ant} + T_{eff} = T_{ant} + \left(\frac{1}{G_{feed}} - 1 \right) T_{phys} + \frac{1}{G_{feed}} T_{LNA} + \frac{1}{G_{feed} G_{LNA}} T_{rec}$$

$$T_{sb} = G_{feed} T_{sa} = G_{feed} T_{ant} + \left(1 - G_{feed}\right) T_{phys} + T_{LNA} + \frac{1}{G_{LNA}} T_{rec}$$

Η σημασία ενός υψηλού κέρδους και χαμηλού θορύβου ενισχυτή φαίνεται από την εξίσωση (2.8.17). Η υψηλή τομή του G_{LNA} θα ελαχιστοποιήσει την επίδραση των υπόλοιπων συσκευών του συστήματος του δέκτη, ενώ η χαμηλή τιμή του T_{LNA} θα προσθέσει μόνο ένα μικρό ποσό θορύβου. Οι τιμές του T_{LNA} συνήθως κυμαίνονται από 20K για ψυχρούς ενισχυτές ως 100K σε θερμοκρασία δωματίου.

Η γραμμή εισόδου μπορεί να έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα. Εάν η γραμμή είναι μεγάλων απωλειών ή πολύ μακριά, η ποσότητα $G_{feed} = e^{-2al}$ θα είναι μικρή ή το $1/G_{feed}$ μεγάλο, συνεισφέροντας ένα σημαντικό ποσό στη θερμοκρασία θορύβου του συστήματος. Συχνά, το LNA τοποθετείται πριν από τη γραμμή εισόδου, κοντά στο σημείο εστίασης του δέκτη της κεραίας, έτσι ώστε η επίδραση της γραμμής εισόδου να μειώνεται από τον παράγοντα G_{LNA}.

Όμοια οφέλη έχουμε στις κεραίες βάσης ασύρματων τηλεπικοινωνιών, όπου ενισχυτές υψηλού κέρδους μπορούν να τοποθετηθούν στην κορυφή των πύργων των κεραιών αντί στη βάση του σταθμού, η οποία μπορεί να βρίσκεται πολύ μακριά από τους πύργους. Οι απώλειες των καλωδιώσεων σε τέτοιες εφαρμογές μπορεί να είναι της τάξης των 2-4dB (με παράγοντα κέρδους $G_f = 0.63 - 0.40$).

Ο λόγος σήματος προς θορύβου συστήματος του συστήματος του δέκτη (αναφέρεται στο σημείο α του σχήματος 2.7.1) θα είναι ο λόγος της λαμβανόμενης ισχύος P_R προς τον θόρυβο του συστήματος $N_{sys} = kT_{sys}B$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Friis (για εκπομπή ισχύος) έχουμε:

$$SNR = \frac{P_R}{N_{sys}} = \frac{P_R}{kT_{sys}B} = \left(P_T G_T\right) \frac{1}{L_f} \left(\frac{G_R}{T_{sys}} \right) \frac{1}{kB} \tag{2.8.18}$$

Ο λόγος αυτός επίσης ονομάζεται λόγος φορέα προς θόρυβο συστήματος και παριστάνεται με C/N. Για μια γνωστή εκπεμπόμενη $EIRP, P_T G_T$, η απόδοση του δέκτη

εξαρτάται σημαντικά από το λόγο G_R/T_{sys} και είναι γνωστή ως ο λόγος *G/T* της κεραίας δέκτη ή ως figure of merit. Μετριέται σε dB/K . Σε dB η εξίσωση (2.8.18) γίνεται:

$$\boxed{(SNR)_{dB} = (P_T G_T)_{dB} - (L_f)_{dB} + \left(\frac{G_R}{T_{sys}}\right)_{dB} - k_{dB} - B_{dB}} \qquad (2.8.19)$$

Το SNR του δέκτη μπορεί επίσης να αναφέρεται στην είσοδο του LNA (σημείο *b*). Ο λόγος G/T δε θα αλλάξει αριθμητικά αλλά θα είναι ο λόγος του κέρδους του σήματος μετά τη γραμμή εισόδου προς τη θερμοκρασία T_{sb} του συστήματος:

$$SNR = (P_T G_T)\frac{1}{L_f}\left(\frac{G_R}{T_{sys}}\right)\frac{1}{kB} = (P_T G_T)\frac{1}{L_f}\left(\frac{G_R G_{feed}}{T_{sb}}\right)\frac{1}{kB} \qquad (2.8.20)$$

Παράδειγμα 2.8.1:
Συνήθως οι κεραίες σταθμών εδάφους για δορυφορικές επικοινωνίες έχουν λόγους *G/T* της τάξης των 40dB/K, ενώ οι κεραίες δέκτες των δορυφόρων έχουν *G/T*=-7dB/K ή μικρότερο. Το αρνητικό πρόσημο εμφανίζεται εξαιτίας του πολύ μικρού κέρδους του δορυφόρου και της πολύ υψηλότερης θερμοκρασίας, αφού ο δορυφόρος κοιτάζει προς μια θερμή γη.

Παράδειγμα 2.8.2:
Θεωρείστε μια κεραία δέκτη όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7.1 με θερμοκρασία κεραίας 40K, απώλειες της γραμμής εισόδου 0.1dB, φυσική θερμοκρασία της γραμμής εισόδου 290K, κέρδος LNA και θερμοκρασία θορύβου 50dB και 80K αντίστοιχα. Τα υπόλοιπα κυκλώματα του δέκτη έχουν θερμοκρασία θορύβου 2000K. Υποθέτοντας ότι η κεραία δέκτης έχει κέρδος 45dB, υπολογίστε τη θερμοκρασία θορύβου του συστήματος και το λόγο *G/T* σε ένα σημείο *a* και *b* του σχήματος 2.7.1. Επαναλάβετε εάν η απώλεια της γραμμής εισόδου είναι 1dB.
Λύση:
Η γραμμή εισόδου έχει κέρδος $G_{feed} = 10^{-0.1/10} = 10^{-0.01} = 0.9772$, και το LNA έχει $G_{LNA} = 10^{50/10} = 10^5$. Έτσι η θερμοκρασία θορύβου του συστήματος στο σημείο *a* θα είναι:

$$\begin{aligned} T_{sys} &= T_{ant} + \left(\frac{1}{G_{feed}} - 1\right)T_{phys} + \frac{1}{G_{feed}}T_{LNA} + \frac{1}{G_{feed}G_{LNA}}T_{rec} \\ &= 40 + \left(\frac{1}{10^{-0.01}} - 1\right)290 + \frac{80}{10^{-0.01}} + \frac{2000}{10^{-0.01}\cdot 10^5} \\ &= 40 + 6.77 + 81.87 + 0.02 = 128.62K = 21.09dBK \end{aligned}$$

Στο σημείο *b* έχουμε $T_{sb} = G_{feed}T_{sys} = 0.9772 \times 128.62 = 125.69K = 20.99dBK$. Ο λόγος *G/T* στο σημείο *a* θα είναι $G_R/T_{sys} = 45 - 21.09 = 23.91dB/K$. Στο σημείο *b* το κέρδος θα είναι $G_R G_{feed} = 45 - 0.1 = 44.9dB$, και έτσι, $G/T = G_R G_{feed}/T_{sb} = 44.9 - 20.99 = 23.91dB/K$, το οποίο είναι το ίδιο με αυτό στο σημείο *a*.

Για μια γραμμή εισόδου με απώλειες 1dB βρίσκουμε $T_{sys} = 215.80K = 23.34dB$. Ο αντίστοιχος λόγος *G/T* θα είναι 45-23.34=21.66dB.

Παράδειγμα 2.8.3:
Υποθέστε ότι ο LNA τοποθετείται πριν τη γραμμή εισόδου στο παραπάνω παράδειγμα. Υπολογίστε τη θερμοκρασία θορύβου του συστήματος σε αυτή την περίπτωση για απώλειες της γραμμής εισόδου 0.1dB και 1dB.

Λύση:
Αλλάζοντας τους ρόλους της γραμμής εισόδου και του LNA στην εξίσωση (2.8.16), έχουμε για τη θερμοκρασία θορύβου του συστήματος:

$$T_{sys} = T_{ant} + T_{LNA} + \frac{1}{G_{LNA}} T_{feed} + \frac{1}{G_{feed} G_{LNA}} T_{rec}$$

Με $G_{feed} = 10^{-0.1/10} = 0.9772$, βρίσκουμε $T_{feed} = 6.75K$, και με $G_{feed} = 10^{-1/10} = 0.7943$, $T_{feed} = 75.1K$. Εξαιτίας του μεγάλου κέρδους του LNA η τιμή T_{sys} θα είναι ουσιαστικά ίση με $T_{ant} + T_{LNA}$. Πράγματι σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε:

$$T_{sys} = 120.0205K \quad \text{και} \quad T_{sys} = 120.0259K$$

Ο λόγος G/T θα είναι $45 - 10\log_{10}(120) = 20.8 dB/K$.

2.9 Περιορισμοί ρυθμού δεδομένων

Το SNR του συστήματος περιορίζει το ρυθμό δεδομένων μεταξύ των δυο κεραιών. Σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon ο μέγιστος ρυθμός δεδομένων (σε bits/sec) που μπορεί να επιτευχθεί είναι:

$$C = B\log_2(1 + SNR) \tag{2.9.1}$$

όπου ο SNR είναι σε ακέραιες μονάδες. Για αριθμούς δεδομένων $R \le C$, το θεώρημα του Shannon δηλώνει ότι υπάρχει ένα ιδανικό σύστημα κώδικα, το οποίο επιτρέπει τη μετάδοση χωρίς λάθη.

Σε ένα πρακτικό ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας, η πιθανότητα λανθασμένου bit ή ο ρυθμός λάθους bit (BER), P_e, είναι μικρός αλλά όχι μηδενικός. Η παράμετρος κλειδί με την οποία μπορεί να υπολογιστεί το P_e είναι ο λόγος E_b/N_0, όπου E_b είναι η ενέργεια ανά bit και N_0 είναι η φασματική πυκνότητα θορύβου του συστήματος $N_0 = kT_{sys}$.

Η λειτουργική σχέση μεταξύ P_e και του λόγου E_b/N_0 εξαρτάται κάθε φορά από το συγκεκριμένο ψηφιακό μοτίβο που χρησιμοποιούμε. Για παράδειγμα, στο δυαδικό και στο τετραγωνικό σύστημα διαμόρφωσης (BPSK και QPSK) το P_e και το αντίστροφό του δίνονται από:

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E_b}{N_0} = \left[erfinv(1 - 2P_e)\right]^2 \tag{2.9.2}$$

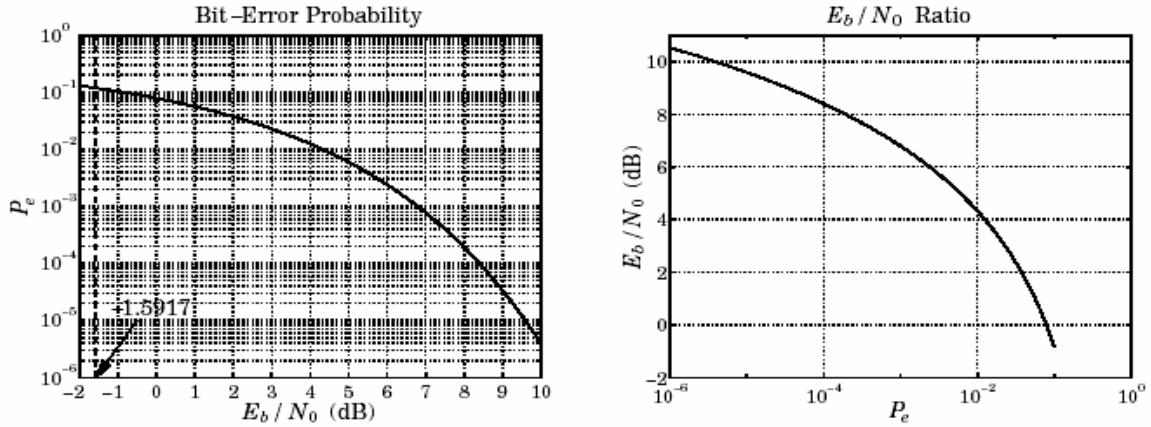
όπου *erfc(x)* είναι η σχετική συνάρτηση σφάλματος και *erf(x), erfinv(x)* είναι η συνάρτηση σφάλματος και η αντίστροφή της σύμφωνα με το MATLAB :

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \qquad y = erf(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = erfinv(y) \tag{2.9.3}$$

Οι σχέσεις (2.9.2) αναπαρίστανται στο σχήμα 2.9.1. Το αριστερό διάγραμμα δείχνει επίσης τον ιδανικό περιορισμό Shannon $E_b/N_0 = \ln 2 = 0.6931 \cong -1.5917 dB$, ο οποίος προέρχεται από τον περιορισμό της εξίσωσης (2.9.1) για απεριόριστο πλάτος κύματος.

Εάν T_b είναι ο χρόνος που απαιτείται για να εκπεμπθεί ένα bit, τότε ο ρυθμός δεδομένου θα είναι $R = 1/T_b$, και η απαιτούμενη ισχύς, $P = E_b/T_b = E_b R$. Τότε το SNR θα είναι:

$$SNR = \frac{P}{N_{sys}} = \frac{P}{kT_{sys}B} = \frac{E_b}{N_0}\frac{R}{B}$$



<u>Σχήμα 2.9.1:</u> P_e προς E_b/N_0 και η αντιστροφή της για ένα σύστημα BPSK.

Χρησιμοποιώντας την επέκταση ελάχιστου - χ, $\log_2(1+x) \cong x/\ln 2$, η συνθήκη του Shannon για μετάδοση χωρίς λάθη θα γίνει για $B \to \infty$:

$$R \le C = B\log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{R}{B}\right) \to B\frac{E_b R}{N_0 B \ln 2} = \frac{R}{\ln 2}\frac{E_b}{N_0} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \ge \ln 2 = -1.5917 dB$$

Για ένα ζευγάρι επικοινωνούντων κεραιών η λαμβανόμενη ισχύς θα σχετίζεται με την ενέργεια ανά bit με τη σχέση $P_R = E_b/T_b = E_b R$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Friis έχουμε:

$$R\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_R}{N_0} = \frac{P_{EIRP}G_f G_R}{kT_{sys}} = (P_T G_T)\frac{G_R}{kT_{sys}}\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \qquad (2.9.4)$$

η οποία μπορεί να λυθεί για τον μέγιστο δυνατό ρυθμό δεδομένων (σε bits/sec):

$$R = \frac{1}{E_b/N_0}\frac{P_{EIRP}G_f G_R}{kT_{sys}} = \frac{1}{E_b/N_0}(P_T G_T)\frac{G_R}{kT_{sys}}\left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \qquad (2.9.5)$$

Ένας συνολικός παράγοντας κέρδους, $G_{other} = 1/L_{other}$, μπορεί να εισαχθεί για να περιγράψει άλλες απώλειες, όπως ατμοσφαιρικές απώλειες.

Παράδειγμα 2.9.1:
Τα διαστημόπλοια Voyager έχουν διάμετρο κεραίας d=3.66m (12ft) και συντελεστή αποτελεσματικότητας e_a=0.6 . Η συχνότητα λειτουργίας είναι f=8.415GHz και η ισχύς του πομπού P_T=18W. Υποθέτοντας ότι έχουμε την ίδια αποτελεσματικότητα για την κεραία δέκτη 70m του διαστημικού ερευνητικού δικτύου της NASA στο Goldstone , υπολογίζουμε τα κέρδη της κεραίας χρησιμοποιώντας τη σχέση $G = e_a(\pi d/\lambda)^2$, με $\lambda = c/f = 0.0357m$:

$$G_T = 47.95dB, G_R = 73.58dB, P_T = 13.62dBW$$

Υποθέτοντας ότι έχουμε θερμοκρασία θορύβου του συστήματος $T_{sys} = 25K = 13.98dBK$ για την κεραία δέκτη, βρίσκουμε για την φασματική πυκνότητα θορύβου $N_0 = kT_s = -214.62\,dBW/Hz$, όπου χρησιμοποιήσαμε $k = -228.6dB$. Υποθέτοντας έναν ρυθμό λάθους $P_e = 5\times10^{-3}$, βρίσκουμε από την εξίσωση (2.9.2) τον απαιτούμενο λόγο $E_b/N_0 = 3.317 = 5.208dB$.

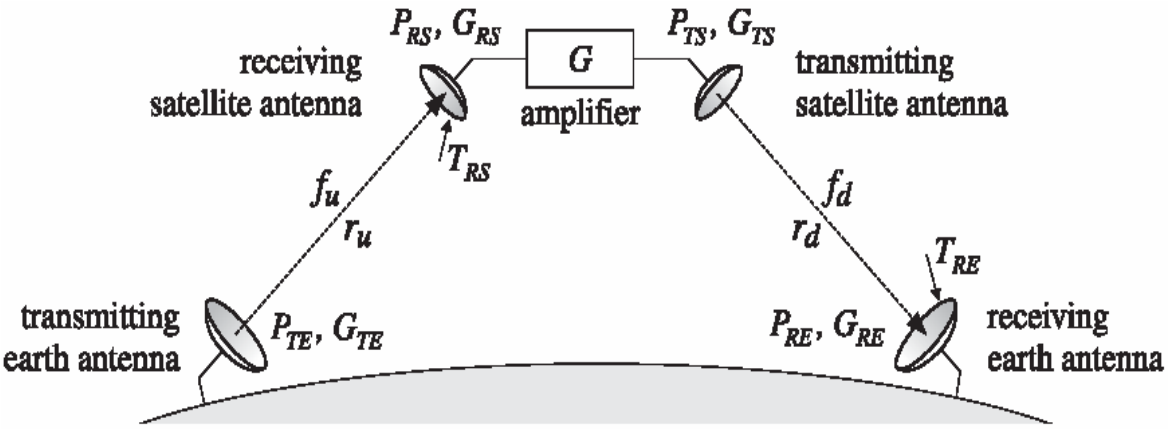
Το Voyager 1 ήταν στον Δία το 1977, στον Ερμή το 1980 και στον Ποσειδώνα το 1989. Το 2002 ήταν σε μια απόσταση περίπου $r = 12\times10^9\,Km$. Αναμένεται να είναι σε απόσταση $r = 22\times10^9\,Km$ το έτος 2020. Υπολογίζουμε το αντίστοιχο κέρδος του ελεύθερου χώρου $G_f = (\lambda/4\pi r)^2$ και τους αναμενόμενους ρυθμούς δεδομένων R από την εξίσωση (2.9.5), όπου r είναι σε μονάδες της τάξης του $10^9\,Km$.

Location	r	$G_f(dB)$	$R(dB)$	$R(bits/\sec)$
Jupiter	0.78	-288.78	50.78	119,757
Saturn	1.43	-294.05	45.52	35,630
Neptune	4.50	-304.01	35.56	3,598
2002	12.00	-312.53	27.04	506
2020	22.00	-317.79	21.78	150

όπου υποθέσαμε ένα συνολικό παράγοντα απωλειών $G_{other} = -5dB$. Περισσότερες πληροφορίες για την αποστολή Voyager και τις κεραίες έρευνας του διαστήματος της NASA, βρίσκουμε στο διαδίκτυο.

2.10 Δορυφορικές ζεύξεις

θεωρούμε ένα σύστημα επικοινωνιών Γη – δορυφόρος – Γη, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.10.1. Θέλουμε να υπολογίσουμε το συνολικό προϋπολογισμό της ζεύξης και το λόγο σήματος προς θόρυβο συστήματος μεταξύ των δυο κεραιών της Γης που επικοινωνούν μέσω του δορυφόρου.



Σχήμα 2.10.1 Άνω και κάτω ζεύξη δορυφορικών επικοινωνιών.

Σε ένα γεωστατικό δορυφορικό σύστημα, οι συχνότητες άνω και κάτω ζεύξης f_u, f_d είναι τυπικά 6/4GHz και 14/11 GHz. Οι αποστάσεις r_u, r_d είναι της τάξης των 40000Km. Τα μήκη κύματος των ζεύξεων θα είναι $\lambda_u = c/f_u, \lambda_d = c/f_d$. Οι παράγοντες κέρδους/ απωλειών του κενού θα είναι από την εξίσωση (2.6.5):

$$G_{fu} = \frac{1}{L_{fu}} = \left(\frac{\lambda_u}{4\pi r_u}\right)^2, G_{fd} = \frac{1}{L_{fd}} = \left(\frac{\lambda_d}{4\pi r_d}\right)^2 \quad (2.10.1)$$

Ο δορυφόρος έχει ενσωματωμένο έναν ενισχυτή κέρδους G, ο οποίος μπορεί να είναι της τάξης των 100-120dB. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Friis για το κέρδος, εξίσωση (2.6.6), οι εξισώσεις για την άνω ζεύξη, την ενίσχυση του δορυφόρου και τα στάδια της κάτω ζεύξης θα είναι:

$$P_{EIRP} = P_{TE}G_{TE}$$
$$P_{RS} = P_{TE}G_{TE}G_{fu}G_{RS}$$
$$P_{TS} = GP_{RS}$$
$$P_{RE} = P_{TS}G_{TS}G_fG_{RE}$$

Εκφράζοντας το P_{RE} σε συνάρτηση του P_{TE}, έχουμε:

$$P_{RE} = P_{RS}GG_{TS}G_{fd}G_{RE} = P_{TE}G_{TE}G_{fu}G_{RS}GG_{TS}G_{fd}G_{RE} \quad (2.10.2)$$

ή ειδικά για τους παράγοντες απωλειών του κενού:

$$P_{RE} = P_{TE}G_{TE}G_{RS}GGTSG_{RE}\left(\frac{\lambda_u}{4\pi r_u}\right)^2\left(\frac{\lambda_d}{4\pi r_d}\right)^2 \quad (2.10.3)$$

Εξαιτίας του γεγονότος ότι υπάρχουν δύο κεραίες δέκτες, θα υπάρχουν δύο θερμοκρασίες θορύβου συστήματος, που θα είναι T_{RS} και T_{RE} για τις κεραίες δέκτες του

δορυφόρου και της Γης αντίστοιχα. Αυτές συνεισφέρουν τόσο στο θόρυβο λόγω κεραίας όσο και σε αυτόν λόγω κυκλωμάτων του δέκτη. Οι αντίστοιχες figures of merit θα είναι οι ποσότητες G_{RS}/T_{RS} και G_{RE}/T_{RE} . Μπορούμε να υπολογίσουμε τα SNR της άνω και κάτω ζεύξης για κάθε κεραία:

$$SNR_u = \frac{P_{RS}}{kT_{RS}B}, SNR_d = \frac{P_{RE}}{kT_{RE}B} \tag{2.10.4}$$

Ο θόρυβος του συστήματος T_{RS}, που παράγεται από την κεραία δέκτη του δορυφόρου, θα ενισχυθεί κατά G και θα εκπεμπθεί κάτω στην κεραία της Γης, όπου θα προστεθεί στην θερμοκρασία θορύβου του συστήματος. Μέχρι να φτάσει στην κεραία της Γης θα έχει αυξηθεί κατά $GG_{TS}G_{fd}G_{RE}$. Έτσι, η συνολική θερμοκρασία θορύβου του συστήματος του δικτύου που μετράται στην κεραία δέκτη της Γης, θα είναι:

$$T_{sys} = T_{RE} + GG_{TS}G_{fd}G_{RE}T_{RS} \tag{2.10.5}$$

Τότε το SNR του συνολικού δικτύου θα είναι:

$$SNR_{tot} = \frac{P_{RE}}{kT_{sys}B} \tag{2.10.6}$$

$$SNR_{tot}^{-1} = \frac{k\left(T_{RE} + GG_{TS}G_{fd}G_{RE}T_{RS}\right)B}{P_{RE}} = \frac{kT_{RE}B}{P_{RE}} + \frac{kGG_{TS}G_{fd}G_{RE}T_{RS}B}{P_{RE}}$$
$$= \frac{kT_{RE}B}{P_{RE}} + \frac{kGG_{TS}G_{fd}G_{RE}T_{RS}B}{GG_{TS}G_{fd}G_{RE}P_{RS}} = \frac{kT_{RE}B}{P_{RE}} + \frac{kT_{RS}B}{P_{RS}} = SNR_d^{-1} + SNR_u^{-1}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (2.10.2). Ακολουθεί ότι:

$$\boxed{SNR_{tot} = \frac{1}{SNR_u^{-1} + SNR_d^{-1}}} \tag{2.10.7}$$

Αυτή μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή:

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{tot} = \frac{1}{\left(\frac{C}{N}\right)_u^{-1} + \left(\frac{C}{N}\right)_d^{-1}}$$

<u>Παράδειγμα 2.10.1:</u>

Ως παράδειγμα συνολικού υπολογισμού μιας ζεύξης, υποθέτουμε τα παρακάτω στοιχεία: οι αποστάσεις άνω / κάτω ζεύξης είναι 36000Km. Οι συχνότητές του 6/4 GHz. Οι διάμετροι των κεραιών της Γης και του δορυφόρου είναι 15m και 0.5m με συντελεστή αποτελεσματικότητας 60%. Η κεραία στη Γη εκπέμπει με ισχύ 1KW και το κέρδος του πομπού του δορυφόρου είναι 90dB. Η κεραία δέκτης του δορυφόρου κοιτάζει προς τη Γη με θερμοκρασία θορύβου δέκτη 2700K, ενώ η κεραία δέκτης της Γης κοιτάζει προς τον ουρανό με θερμοκρασία 50K και χρησιμοποιεί έναν υψηλού κέρδους LNA ενισχυτή 80K (οι απώλειες της γραμμής εισόδου παραβλέπονται). Το εύρος ζώνης είναι 30MHz.

Τα μήκη κύματος της άνω και κάτω ζεύξης είναι $\lambda_u = 0.05m, \lambda_d = 0.075m,$ που αντιστοιχούν σε 6 και 4 GHz. Τα κέρδη τους στο κενό είναι:

$$G_{fu} = -L_{fu} = -199.13dB, G_{fd} = -L_{fd} = -195.61dB$$

Τα κέρδη της κεραίας είναι:

$$G_{TE} = 57.27dB, G_{RS} = 27.72dB, G_{TS} = 24.20dB, G_{RE} = 53.75dB$$

Με $P_{TE} = 1KW = 30dBW$, η EIRP της κεραίας πομπού της γης θα είναι: $P_{EIRP} = 30 + 57.27 = 87.27dBW$. Η ισχύς που λαμβάνεται από την κεραία του δορυφόρου είναι:

$$P_{RS} = 87.27 - 199.13 + 27.72 = -84.14dBW$$

Αφού ενισχυθεί από τον πομπό του δορυφόρου κατά 90dB , η ισχύς εκπέμπεται κάτω στην κεραία δέκτη της γης και είναι:

$$P_{TS} = 90 - 84.14 = 5.86dBW$$

Η EIRP της κεραίας πομπού του δορυφόρου θα είναι $(P_{TS}G_{TS})_{dB} = 5.86 + 24.20 = 30.06dBW$. Η ισχύς που λαμβάνεται από την κεραία της γης θα είναι:

$$P_{RE} = 30.06 - 195.61 + 53.75 = -111.80dBW$$

Οι θερμοκρασίες θορύβου του συστήματος είναι: $T_{RS} = 300 + 2700 = 3000K$ και $T_{RE} = 50 + 80 = 130K$, και σε dBK: $T_{RS} = 34.77$ και $T_{RE} = 21.14$. Τα 30MHz εύρος ζώνης είναι σε dB: $B_{dB} = 10\log_{10}(30 \times 10^6) = 74.77dBHz$. Χρησιμοποιώντας τη σταθερά Boltzmann K σε dB, $k_{dB} = -228.6$, υπολογίζουμε τους θορύβους του συστήματος των δεκτών σε dB, χρησιμοποιώντας $N = k_{dB} + T_{dB} + B_{dB}$:

$$N_{RS} = -228.6 + 34.77 + 74.77 = -119.06dBW$$
$$N_{RS} = -228.6 + 21.14 + 74.77 = -132.69dBW$$

Ακολουθεί ότι οι λόγοι G/T και SNR του συστήματος για τις κεραίες δέκτες θα είναι:

$$(G/T)_u = G_{RS} - T_{RS} = 27.72 - 34.77 = -7.05dB/K$$
$$(G/T)_d = G_{RE} - T_{RE} = 53.75 - 21.14 = 32.61dB/K$$
$$SNR_u = P_{RS} - N_{RS} = -84.14 + 119.06 = 34.92dB = 3103.44$$
$$SNR_d = P_{RE} - N_{RE} = -111.80 + 132.69 = 20.89dB = 122.72$$

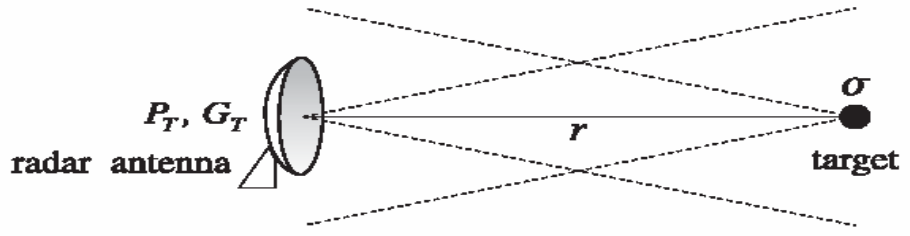
Το συνολικό SNR του συστήματος υπολογίζεται από την εξίσωση (2.10.7) χρησιμοποιώντας ακέραιες μονάδες:

$$SNR_{tot} = \frac{1}{SNR_u^{-1} + SNR_d^{-1}} = \frac{1}{(3103.44)^{-1} + (122.72)^{-1}} = 118.05 = 20.72dB$$

Το συνολικό *SNR* είναι όμοιο με το *SNR* της κάτω ζεύξης.

2.11 Εξίσωση RADAR

Μια άλλη εφαρμογή των όρων κέρδους και ενεργούς περιοχής και χρήσης των εξισώσεων του Friis, είναι στα radar. Στο σχήμα 3.11.1 φαίνεται μια κεραία radar, η οποία «φωτίζει» ένα στόχο σε απόσταση r κατά τη διεύθυνση του μέγιστου κέρδους της. Το επικείμενο κύμα στον στόχο θα ανακλαστεί και ένα τμήμα του θα επιστρέψει πίσω στην κεραία.



Σχήμα 2.11.1: Κεραία radar και στόχος.

Η έννοια της περιοχής διασταυρώσεως radar και σ , αποτελεί ένα κριτήριο μέτρησης της ενεργής περιοχής του στόχου και της ανακλώμενης ισχύος. Αν η κεραία του radar εκπέμπει ισχύ *Pr* με κέρδος *Gr*, η πυκνότητα ισχύος του εκπεμπόμενου πεδίου στην τοποθεσία του στόχου θα είναι:

$$P_T = \frac{P_T G_T}{4\pi r^2} \qquad (2.11.1)$$

Από τον ορισμό του σ, η ισχύς που ανακλά στον στόχο και επιστρέφει στην κεραία θα είναι:

$$P_{target} = \sigma P_T = \frac{P_T G_T \sigma}{4\pi r^2} \qquad (2.11.2)$$

Εξ' ορισμού της περιοχής διασταυρώσεως του radar, η ισχύς P_{target} θα αντανακλαστεί ισοτροπικά και θα δημιουργήσει μια πυκνότητα ισχύος στην περιοχή της κεραίας του radar :

$$P_{target} = \frac{P_{target}}{4\pi r^2} = \frac{P_T G_T \sigma}{(4\pi r^2)^2} \qquad (2.11.3)$$

Η ποσότητα της ισχύος που λαμβάνεται από την κεραία του radar μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της ενεργούς περιοχής A_R ως ακολούθως:

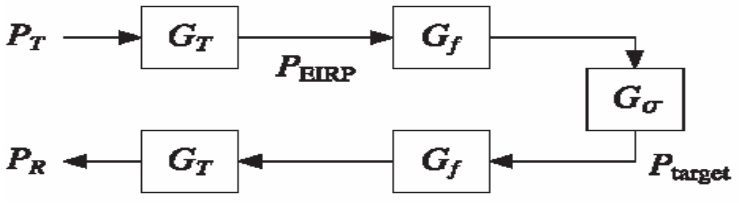
$$P_R = A_R \mathrm{P}_{target} = \frac{P_T G_T A_R \sigma}{(4\pi)^2 r^4} \qquad (2.11.4)$$

Αυτή είναι γνωστή και ως τύπος του Friis. Χρησιμοποιώντας $A_R = A_T$ και $G_T = 4\pi A_T / \lambda^2$ μπορούμε να εκφράσουμε την εξίσωση (2.11.4) με τις εξής εναλλακτικές μορφές:

$$P_R = \frac{P_T A_T^2 \sigma}{4\pi\lambda^2 r^4} = \frac{P_T G_T^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 r^4} = P_T G_T^2 \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^4 \left(\frac{4\pi\sigma}{\lambda^2}\right) \qquad (2.11.5)$$

Εισάγοντας το ισοδύναμο κέρδος του στόχου που αντιστοιχεί στην περιοχή διασταυρώσεως του radar, το οποίο είναι $G_\sigma = 4\pi\sigma/\lambda^2$, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (14.11.5) ως το γινόμενο των κερδών:

$$P_R = P_T G_T^2 G_f^2 G_\sigma \qquad (.11.6)$$



Σχήμα 2.11.2: Μοντέλο κέρδους εξισώσεως radar.

Το σχήμα 2.11.2 δείχνει το μοντέλο αυτού του κέρδους. Υπάρχουν δυο μονοπάτια ελεύθερου χώρου και δύο κέρδη κεραιών ως κέρδη εκπομπής και λήψης.

Η ελάχιστη ανιχνεύσιμη λαμβανόμενη ισχύς, $P_{R,\min}$, ορίζει τη μέγιστη απόσταση $r_{\max}$,στην οποία ο στόχος μπορεί να ανιχνευτεί:

$$P_{R,\min} = \frac{P_T G_T A_R \sigma}{(4\pi)^2 r_{\max}^4}$$

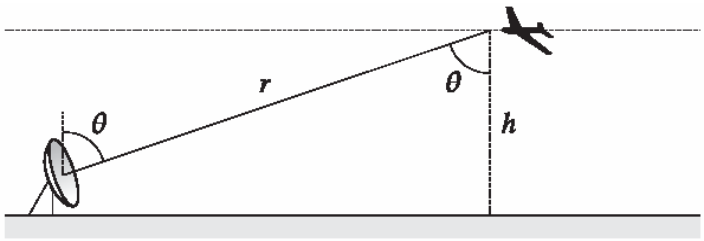
Λύνοντας για $r_{\max}$ έχουμε:

$$r_{\max} = \left[\frac{P_T G_T A_T \sigma}{(4\pi)^2 P_{R,\min}}\right]^{1/4} \qquad (2.11.7)$$

Εάν ο στόχος δεν είναι στη διεύθυνση του μέγιστου κέρδους G_T της κεραίας του radar, αλλά σε κάποια άλλη διεύθυνση, ας πούμε *(θ,φ),* τότε το μέγιστο κέρδος G_T στην εξίσωση (2.11.5) πρέπει να αντικατασταθεί με $G_T g(\theta,\phi)$, όπου $g(\theta,\phi)$ είναι το κανονικοποιημένο κέρδος της κεραίας. Τότε, η λαμβανόμενη ισχύς μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$P_R = \frac{P_T G_T^2 g^2(\theta,\phi) \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 r^4} \qquad (2.11.8)$$

Στους σταθμούς radar εδάφους που προσπαθούν να ανιχνεύσουν αεροσκάφη που πετούν σε συγκεκριμένο ύψος h, η ισχύς που λαμβάνεται από το radar μπορεί να είναι ανεξάρτητη της απόστασης r, έως και μια συγκεκριμένη απόσταση, επιλέγοντας το κέρδος $g(\theta,\phi)$ κατάλληλα. Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.11.3, το ύψος h σχετίζεται με το r, με τη σχέση $h = r\cos\theta$.



Σχήμα 2.11.3: Κέρδος κεραίας αντίστροφου συνημίτονου (secant).

Εάν το κέρδος είναι σχεδιασμένο να έχει σχήμα ορθογώνιου αντιστρόφου συνημίτονου (secant-squared) $g(\theta,\phi) = K/\cos^2\theta$, όπου K είναι μια σταθερά, τότε η ισχύς θα είναι ανεξάρτητη του r. Πράγματι:

$$P_R = \frac{P_T G_T^2(\theta,\phi)\lambda^2\sigma}{(4\pi)^3 r^4} = \frac{P_T G_T^2 K^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 r^4 \cos^4\theta} = \frac{P_T G_T^2 K^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 h^4}$$

Η συμπεριφορά secant (αντίστροφου συνημίτονου) δεν ισχύει για όλες τις πολικές γωνίες θ, αλλά μόνο για ένα συγκεκριμένο φάσμα, τέτοιο ώστε $0 \le \theta \le \theta_{\max}$, όπου η $\theta_{\max}$ αντιστοιχεί στη μέγιστη εμβέλεια απόστασης του radar, $r_{\max} = h/\cos\theta_{\max}$. Το επιθυμητό σχήμα secant μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλες εισόδους στην κεραία πιάτο του radar ή με μια κεραία «πίνακα» (antenna array) με κατάλληλα σχεδιασμένο «πίνακα» στοιχείων.

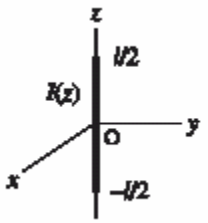
Κεφάλαιο 3

Γραμμικές κεραίες και κεραίες βρόγχου

3.1 Γραμμικές κεραίες

Το διάγραμμα ακτινοβολίας των γωνιακών συντεταγμένων στις κεραίες εξαρτάται πλήρως από την εγκάρσια συνιστώσα $F_1 = \hat{\theta}F_\theta + \hat{\phi}F_\phi$ του διανύσματος ακτινοβολίας F το οποίο με τη σειρά του εξαρτάται από την πυκνότητα έντασης J. Εδώ παραθέτουμε κάποια παραδείγματα πυκνοτήτων έντασης περιγράφοντας διάφορους τύπους κεραιών, όπως γραμμικές, κεραίες βρόγχου και γραμμικές στοιχειοκεραίες.

Για τις γραμμικές κεραίες επιλέγουμε τον άξονα z να βρίσκεται κατά την διεύθυνση της κεραίας. Υποθέτοντας μια πολύ λεπτή κεραία, η πυκνότητα έντασης θα έχει τη μορφή:



$$\boxed{J(r) = \hat{z}I(z)\delta(\chi)\delta(y)} \quad \text{(λεπτή γραμμική κεραία)} \qquad (3.1.1)$$

όπου *I(z)* είναι η κατανομή ρεύματος κατά μήκος του στοιχείου της κεραίας. Στην παράγραφο 4.4 αποδεικνύεται ότι η *I(z)* πλησιάζει την συνάρτηση Helmholtz κατά μήκος της κεραίας:

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} + k^2 I(z) = 0 \qquad (3.1.2)$$

Μερικά παραδείγματα κατανομής ρεύματος *I(z)* είναι τα ακόλουθα:

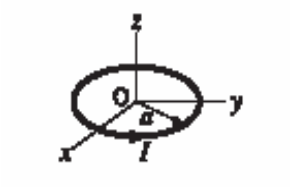
$I(z) = Il\delta(z)$	Δίπολο Hertz
$I(z) = I$	Σταθερό γραμμικό στοιχείο
$I(z) = I(1 - 2\lvert z\rvert / l)$	Μικρό γραμμικό δίπολο
$I(z) = I\sin(k(l/2 - \lvert z\rvert))$	Κεραία σταθερού μήκους κύματος
$I(z) = I\cos(kz)$	Κεραία μισού μήκους κύματος (l=λ/2)
$I(z) = Ie^{-jkz}$	Κεραία οδεύοντος κύματος

όπου l είναι το μήκος κύματος του στοιχείου της κεραίας και οι παραστάσεις ισχύουν για $-l/2 \le z \le l/2$ έτσι ώστε το στοιχείο της κεραίας βρίσκεται στο επίπεδο *xy.*

Τα παραδείγματα για το δίπολο Hertz, το σταθερό γραμμικό στοιχείο και το μικρό γραμμικό δίπολο δεν ακολουθούν την παράσταση (3.1.2) εκτός από την περίπτωση που το μήκος της κεραίας είναι μικρό, δηλαδή $l << \lambda$.

Για τις κεραίες βρόγχου μπορούμε να ορίσουμε τον βρόγχο να εκτείνεται στο επίπεδο *xy* και το κέντρο την αρχή των αξόνων. Και πάλι θεωρούμε λεπτό σύρμα. Για έναν κυκλικό βρόγχο ακτίνας α, η ροπή πέφτει αζιμουθιακώς.

Η σχετική πυκνότητα ρεύματος μπορεί να εκφραστεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες $r = (\rho, \phi, z)$ ως εξής:



$$J(r) = \hat{\phi} I \delta(\rho - \alpha)\delta(z)$$ Κυκλικός βρόγχος (3.1.3)

Η συνάρτηση delta περιορίζει την ροπή $\rho = \alpha$ στο επίπεδο *xy*. Θα συζητήσουμε τις κεραίες βρόγχου στην παράγραφο 3.8.

Οι στοιχειοκεραίες μπορούν να δημιουργηθούν θεωρώντας έναν αριθμό στοιχείων κεραιών, όπως δίπολα Hertz ή δίπολα μισού μήκους κύματος διατεταγμένα με συγκεκριμένους σχηματισμούς, όπως κατά μήκος συγκεκριμένης διεύθυνσης. Μερικά παραδείγματα στοιχειοκεραιών που αποτελούνται από πανομοιότυπα στοιχεία είναι τα ακόλουθα:

$$J(r) = \hat{z}\sum_n a_n I(z)\delta(x - x_n)\delta(y)$$ κατά μήκος της διεύθυνσης x

$$J(r) = \hat{z}\sum_n a_n I(z)\delta(y - y_n)\delta(x)$$ κατά μήκος της διεύθυνσης y

$$J(r) = \hat{z}\sum_n a_n I(z - z_n)\delta(x)\delta(y)$$ κατά μήκος της διεύθυνσης z

$$J(r) = \hat{z}\sum_{mn} a_{mn} I(z)\delta(x - x_m)\delta(y - y_n)$$ δυσδιάστατη επίπεδη στοιχειοκεραία

Οι συνιστώσες a_n, a_{mn} επιλέχθηκαν για να επιτευχθούν οι επιθυμητές συνθήκες κατευθυντικότητας για την κεραία.

Είναι φανερό τώρα από την 3.1.1 ότι το διάνυσμα ακτινοβολίας *F* θα έχει μόνο την z συνιστώσα.

Πράγματι από την εξίσωση (3.7.5) έχουμε:

$$F = \int_v J(r')e^{jk\cdot r'}d^3r' = \hat{z}\int I(z')\delta(x')\delta(y')e^{j(k_x x' + k_y y' + k_z z')}dx'dy'dz'$$

Τα ολοκληρώματα x' και y' γίνονται ασήμαντα ενώ το ολοκλήρωμα z' υπερβαίνει το μήκος *l* της κεραίας. Έτσι:

$$F = \hat{z}F_z = \hat{z}\int_{-l/2}^{l/2} I(z')e^{jk_z z'}dz'$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.8.3) το διάνυσμα μήκους κύματος k μπορεί να αναλυθεί σε καρτεσιανές συνιστώσες ως εξής:

$$k = k\hat{r} = \hat{x}k\cos\phi\sin\theta + \hat{y}k\sin\phi\sin\theta + \hat{z}k\cos\theta = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z$$

Έτσι,

$$\boxed{\begin{aligned} k_x &= k\cos\phi\sin\theta \\ k_y &= k\sin\phi\sin\theta \\ k_z &= k\cos\theta \end{aligned}} \qquad (3.1.4)$$

Έπεται λοιπόν ότι το διάνυσμα ακτινοβολίας F_t θα εξαρτάται μόνο από την γωνία πολικότητας *θ*:

$$\boxed{F_z(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z')e^{jk_z z'}dz' = \int_{-l/2}^{l/2} I(z')e^{jkz'\cos\theta}dz'} \qquad (3.1.5)$$

Χρησιμοποιώντας την παράσταση 1.8.2 μπορούμε να αναλύσουμε το $\hat{z}$ στις σφαιρικές του συντεταγμένες και να προσδιορίσουμε τις ακτινικές και εγκάρσιες συνιστώσες του διανύσματος ακτινοβολίας:

$$F = \hat{z}F_z = (\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)F_z(\theta) = \hat{r}F_z(\theta)\cos - \hat{\theta}F_z(\theta)\sin\theta$$

Έτσι η εγκάρσια συνιστώσα του *F*, θα έχει μόνο *θ* συνιστώσα:

$$F_1(\theta) = \hat{\theta}F_\theta(\theta) = -\hat{\theta}F_z(\theta)\sin\theta$$

Έπεται ότι τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία ακτινοβολίας (1.10.5) που παράγονται από μια γραμμική κεραία θα έχουν τη μορφή:

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \hat{\theta}E_\theta = \hat{\theta}jkn\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}F_z(\theta)\sin\theta \\ H &= \hat{\phi}H_\phi = \hat{\phi}jk\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}F_z(\theta)\sin\theta \end{aligned}} \qquad (3.1.6)$$

Τα πεδία είναι μη κατευθυντικά, που σημαίνει ότι δεν εξαρτώνται από την αζιμουθιακή γωνία φ. Ο παράγοντας $sin\theta$ δημιουργείται από τον μετασχηματισμό των καρτεσιανών συντεταγμένων σε σφαιρικές, ενώ ο παράγοντας $F_z(\theta)$ εξαρτάται από την υποθετική κατανομή ρεύματος *I(z)*.
Η ένταση ακτινοβολίας $U(\theta,\phi)$ εξαρτάται μόνο από το *θ* και δίνεται με την εξίσωση 2.1.4:

$$\boxed{U(\theta) = \frac{nk^2}{32\pi^2}|F_z(\theta)|^2\sin^2\theta} \quad \text{(ένταση ακτινοβολίας γραμμικής κεραίας)} \qquad (3.1.7)$$

Συνοψίζοντας, τα ακτινοβολούμενα πεδία, η συνολική ισχύς που εκπέμπεται και η γωνιακή κατανομή ακτινοβολίας από μια γραμμική κεραία καθορίζονται από την ποσότητα $F_z(\theta)$ που ορίζεται από την εξίσωση (3.1.5).

3.2 Δίπολο Hertz

Το απλούστερο παράδειγμα γραμμικής κεραίας είναι το δίπολο Hertz, το οποίο έχει κατανομή ρεύματος $I(z) = Il\delta(z)$ και ορίζει μια απειροελάχιστα μικρή κεραία στην αρχή των συντεταγμένων. Η συνάρτηση (3.1.5) αποδίδει:

$$F_z(z) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z')e^{jk_z z'}dz' = \int_{-l/2}^{l/2} Il\delta(z')e^{gkz'\cos\theta}dz' = Il$$

Έτσι, η F_z είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του θ. Η ένταση ακτινοβολίας αποδίδεται από την εξίσωση (3.1.7):

$$U(\theta) = \frac{nk^2}{32\pi^2}|Il|^2 \sin^2\theta$$

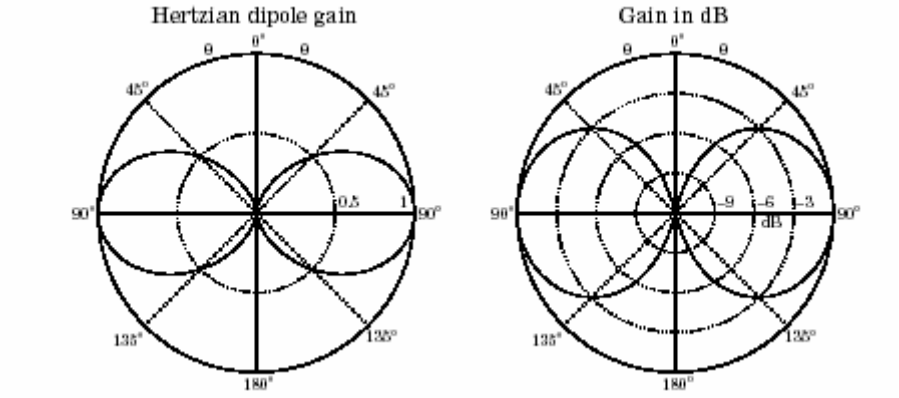
Η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν $\theta = \pi/2$, δηλαδή

$$U_{\max} = \frac{nk^2}{32\pi^2}|Il|^2$$

Έπεται ότι το κανονικοποιημένο κέρδος ισχύος θα είναι:

$$\boxed{g(\theta) = \frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \sin^2\theta} \qquad \text{(Κέρδος διπόλου Hertz)} \qquad (3.2.1)$$

Το κέρδος *g(θ)* φαίνεται σε ακέραιες μονάδες και σε dB στο σχήμα 3.2.1. Σημειώνουμε ότι ο κύκλος των 3dB ή μισής ισχύος τέμνει την καμπύλη κέρδους σε γωνία 45°. Έτσι, το εύρος της δέσμης μισής ισχύος (HPBW) είναι 90° – όχι πολύ στενό. Σημειώνουμε επίσης ότι δεν εκπέμπεται ισχύς κατά μήκος του στοιχείου της κεραίας (στην διεύθυνση z), δηλαδή $\theta=0$.



Σχήμα 3.2.1: Κέρδος διπόλου Hertz.

Σε αυτά τα διαγράμματα το κέρδος υπολογίστηκε με την συνάρτηση `dipole` και σχεδιάστηκε με adp και dbp. Για παράδειγμα το αριστερό διάγραμμα δημιουργήθηκε ως εξής:

```
[g, th, c] = dipole(0, 200);
adp(th, g, 45);
```

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την στερεά γωνία της δέσμης από:

$$\Delta\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin\theta d\theta d\phi = 2\pi\int_0^{\pi} g(\theta)\sin\theta d\theta = 2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta, \quad \text{ή}$$

$$\Delta\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

Έπεται ότι η κατευθυντικότητα θα είναι:

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\Delta\Omega} = \frac{4\pi}{8\pi/3} = 1.5 \equiv 1.76dB$$

Η συνολική ισχύς που εκπέμπεται θα βγαίνει από την σχέση (2.2.17):

$$P_{rad} = U_{\max}\Delta\Omega = \frac{\eta k^2}{32\pi^2}|Il|^2\ \frac{8\pi}{3} = \frac{\eta k^2\,|Il|^2}{12\pi} \qquad (3.2.2)$$

Εξαιτίας της αναλογικότητας του $|I|^2$, μπορούμε να καθορίσουμε την αντίσταση ακτινοβολίας της κεραίας, R_{rad}, ως την αντίσταση που θα κατανάλωνε την ίδια ποσότητα ισχύος με αυτήν που εκπέμπεται, δηλαδή θα βγαίνει από:

$$\boxed{P_{rad} = \frac{1}{2}R_{rad}|I|^2} \qquad (3.2.3)$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις του P_{rad}, βρίσκουμε:

$$R_{rad} = \frac{\eta k^2 l^2}{6\pi} = \frac{2\pi\eta}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad (3.2.4)$$

όπου αντικαθιστούμε $k=2\pi/\lambda$. Επειδή υποθέσαμε μια απείρως μικρή κεραία, $l<<\lambda$, η αντίσταση ακτινοβολίας θα είναι πολύ μικρή.

Ένα σχετικό παράδειγμα κεραίας είναι το ορισμένο ερτζιανό ή σταθερό γραμμικό στοιχείο το οποίο έχει μια σταθερή ένταση I να διαρρέει όλο το μήκος του l, δηλαδή $I(z) = I$ για $-l/2 \le z \le l/2$.

Μπορούμε να γράψουμε την $I(z)$ καλύτερα με την βοήθεια της συνάρτησης $u(z)$, ως εξής:

$$I(z) = I[u(z + l/2) - u(z - l/2)]$$

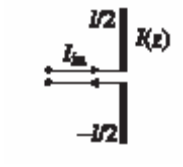
Το δίπολο Hertz μπορεί να θεωρηθεί ως το οριακό παράδειγμα αυτής της περίπτωσης στο όριο $l \to 0$. Όντως, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το l, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι το παράγωγο της u(z) είναι u'(z) = δ(z), έχουμε:

$$I(z) = Il\frac{u(z+l/2)-u(z-l/2)}{l} \to Il\frac{du(z)}{dz} = Il\delta(z)$$

και πρέπει να υποθέσουμε, φυσικά, ότι το προϊόν Il παραμένει πεπερασμένο σε αυτό το όριο.

3.3 Κεραίες στάσιμων κυμάτων

Μια πολύ πρακτική κεραία είναι η κεραία στάσιμου κύματος, τροφοδοτούμενη στο κέντρο και συγκεκριμένα, το δίπολο μισού μήκος κύματος του οποίου το μήκος είναι $l = \lambda/2$. Η κατανομή ρεύματος κατά μήκος της κεραίας υποθέτουμε ότι είναι ένα στάσιμο κύμα, όπως στην περίπτωση μιας ανοιχτής γραμμής μεταφοράς δύο παράλληλων συρμάτων. Πραγματικά, όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω, το κεντροτροφοδοτούμενο δίπολο μπορεί να θεωρηθεί σαν μια ανοιχτή γραμμή μεταφοράς της οποίας τα άκρα αποκλίνουν πάνω και κάτω. Η κατανομή ρεύματος είναι:



$$I(z) = I\sin(k(l/2-|z|)) \qquad \text{(κεραία σταθερού μήκους κύματος)} \qquad (3.3.1)$$

Το διάνυσμα εκπομπής $F_z(\theta)$ είναι:

$$F_z(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} I\sin(k(l/2-|z'|))e^{jkz'\cos\theta}sz' = \frac{2I}{k}\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kl}{2}\right)}{\sin^2\theta}$$

Ένας πιο εύκολος τρόπος να γράψουμε αυτή την έκφραση είναι καθορίζοντας $L = l/\lambda$ που είναι το μήκος της κεραίας σε μονάδες του λ και αντικαθιστώντας $kl/2 = \pi l/2$. Εισάγοντας το $F_z(\theta)$ στην εξίσωση 3.1.7 και απαλείφοντας μερικούς κοινούς παράγοντες, έχουμε:

$$U(\theta) = \frac{\eta|I|^2}{8\pi^2}\left|\frac{\cos(\pi L\cos\theta)-\cos(\pi L)}{\sin\theta}\right|^2 \qquad (3.3.2)$$

Έπεται ότι η κανονικοποιημένη αύξηση ισχύος g(θ) θα έχει την αντίστοιχη μορφή:

$$g(\theta) = c_n\left|\frac{\cos(\pi L\cos\theta)-\cos(\pi L)}{\sin\theta}\right|^2 \qquad \text{(Κανονικοποιημένη αύξηση ισχύος)} \qquad (3.3.3)$$

όπου c_n είναι μια σταθερά κανονικοποίησης που επιλέχθηκε ώστε να επιτευχθεί το μέγιστο του $g(\theta)$ να είναι ίσο με την μονάδα. Ανάλογα με την τιμή του l, αυτό το μέγιστο μπορεί να μην προκύψει όταν θ=π/2.

Στο όριο $L \to 0$, επιτυγχάνουμε το κέρδος του διπόλου Hertz, $g(\theta) = \sin^2(\theta)$. Για μικρές τιμές του L επιτυγχάνουμε την περίπτωση του γραμμικής έντασης. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $\sin x \approx x$, η ένταση (3.3.1) γίνεται:

$$I(z) = Ik\left(\frac{l}{2} - |z|\right), \qquad -\frac{l}{2} \le z \le \frac{l}{2}$$

Γενικά για ένα δίπολο μήκους l, η ένταση του ρεύματος στα άκρα εισόδου της κεραίας δεν είναι απαραίτητα ίσο με το πλάτος κορυφής (peak) I. Πράγματι, θέτοντας $z=0$ στην (3.3.1), έχουμε:

$$I_{in} = I(0) = I\sin(kl/2) \tag{3.3.4}$$

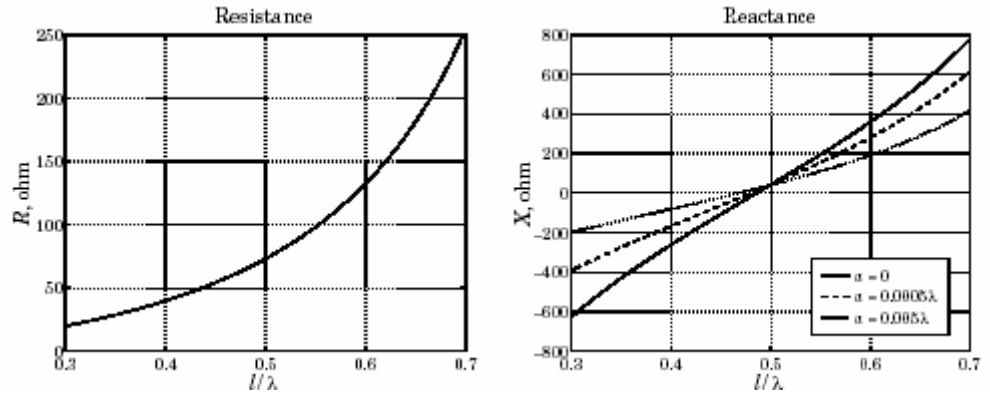
Η αντίσταση ακτινοβολίας μπορεί να οριστεί είτε σε σχέση με την ένταση κορυφής, ή σε σχέση με την ένταση εισόδου μέσω των ορισμών:

$$P_{rad} = \frac{1}{2} R_{peak} |I|^2 = \frac{1}{2} R_{in} |I_{in}|^2$$

Όταν το l είναι υποπολλαπλάσιο του λ, οι εντάσεις ρεύματος εισόδου και κορυφής είναι ίσα και οι δύο ορισμοί της αντίστασης ακτινοβολίας είναι ίδιοι. Αλλά όταν το l είναι πολλαπλάσιο του λ, η εξίσωση (3.3.4) δίνει μηδέν για το ρεύμα εισόδου που θα μπορούσε να σημαίνει άπειρη αντίσταση εισόδου R_{in}. Στην πράξη, η κατανομή ρεύματος είναι σχεδόν ημιτονοειδής και το ρεύμα εισόδου δεν είναι ακριβώς μηδέν.

Η σύνθετη αντίσταση εισόδου μιας κεραίας έχει γενικά και ωμικό μέρος R_{in} και επαγωγικό x_{in} έτσι ώστε $Z_{in} = R_{in} + x_{in}$. Υποθέτοντας ημιτονοειδές ρεύμα, η Z_{in} μπορεί να υπολογιστεί στο MATLAB με την εξίσωση `imped`:

```
Zin=imped(l,a);          % σύνθετη αντίσταση εισόδου κεραίας στάσιμου κύματος
```



Σχήμα 3.3.1 Σύνθετη αντίσταση εισόδου διπόλου σταθερού μήκους κύματος

όπου l και α είναι το μήκος και η ακτίνα της κεραίας σε μονάδες του λ. Για παράδειγμα, ένα δίπολο μισού μήκους κύματος *(l=λ/2)* με μηδενική ακτίνα έχει σύνθετη αντίσταση $Z_{in} = 73.1 + j42.5\Omega$.

Για $l >> \alpha$, η αντίσταση εισόδου παραμένει ανεξάρτητη από την ακτίνα α. Η επαγωγική αντίσταση επηρεάζεται περισσότερο από το α. Το σχήμα 3.3.1 δείχνει το διάγραμμα των R_{in} και x_{in} σε σχέση με το μήκος l της κεραίας στο διάστημα $0.3\lambda \le l \le 0.7\lambda$, στις τρεις επιλογές ακτίνας: $\alpha=0$, $\alpha=0.0005\lambda$ και $\alpha=0.005\lambda$.

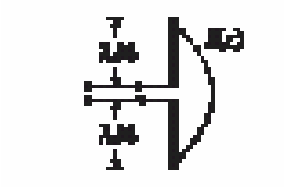
Παρατηρούμε ότι η επαγωγική αντίσταση x_{in} εξαφανίζεται για μήκη λίγο μικρότερα από $l = \lambda/2$. Τέτοιες κεραίες ονομάζονται συντονισμένες κεραίες σε αναλογία με το συντονισμένο RLC κύκλωμα του οποίου η αντίσταση εισόδου $z = R + j(\omega L - l/\omega C)$ έχει μειούμενη επαγωγική αντίσταση στην συχνότητα συντονισμού $\omega = l/\sqrt{LC}$.

Για τις τρεις επιλογές της ακτίνας α, βρίσκουμε τα ακόλουθα συντονισμένα μήκη και τις αντίστοιχες αντιστάσεις εισόδου:

$a = 0$, $l = 0.4857\lambda$, $R_{in} = 67.2\Omega$
$a = 0.0005\lambda$, $l = 0.4801\lambda$, $R_{in} = 65.0\Omega$
$a = 0.005\lambda$, $l = 0.4681\lambda$, $R_{in} = 60.5\Omega$

3.4 Δίπολο μισού μήκους κύματος

Το δίπολο μισού μήκους κύματος, που αντιστοιχεί σε $l = \lambda/2$ ή $L = 0.5$ είναι μια από τις πιο δημοφιλείς κεραίες. Σε αυτή την περίπτωση η κατανομή ρεύματος κατά μήκος της κεραίας έχει τη μορφή:

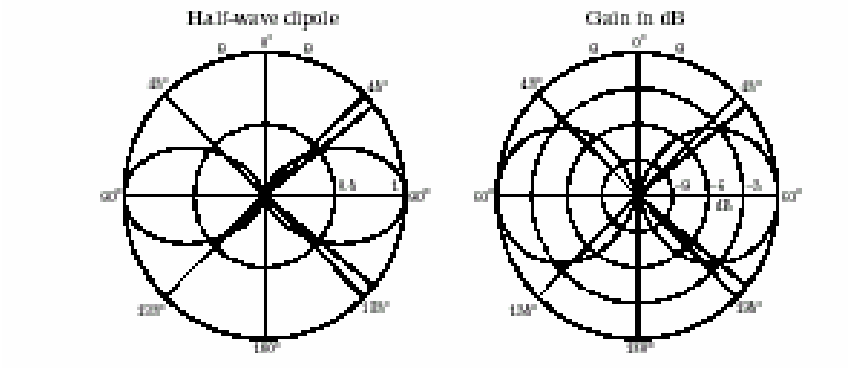


$$I(z) = I\cos(kz)$$ (Δίπολο μισού μήκους κύματος) (3.4.1)

με $-\lambda/4 \le z \le \lambda/4$. Το κανονικοποιημένο κέρδος είναι:

$$g(\theta) = \frac{\cos^2(0.5\pi\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$ (κέρδος δίπολου μισού μήκους κύματος) (3.4.2)

Σημειωτέον ότι η μέγιστη τιμή προκύπτει όταν $\theta = \pi/2$ και η σταθερά κανονικοποίησης είναι η $c_n = 1$. Το σχήμα 3.4.1 δείχνει το κέρδος σε ακέραιες μονάδες και σε μονάδες dB. Ο κύκλος των 3 dB ή μισής ισχύος τέμνει το κέρδος στην γωνία $\theta_{3dB} = 50.96^o$ που οδηγεί σε πλάτος δέσμης μισής ισχύος HPBW = $180^O - 2\theta_{3dB} = 70.08^o$ που σημαίνει λίγο στενότερο από το δίπολο Hertz. Η στερεά γωνία δέσμης μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας το Matlab και βρίσκουμε:



Σχήμα 3.4.1 Κέρδος δίπολου μισού μήκους κύματος σε ακέραιες μονάδες και σε μονάδες dB.

$$\Delta\Omega = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\Omega = 7.6581$$

Η κατευθυντικότητα είναι:

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\Delta\Omega} = 1.64 \equiv 2.15dB$$

Σημειώνοντας ότι η μέγιστη τιμή της έντασης ακτινοβολίας συμβαίνει όταν $\theta = \pi/2$, έχουμε: $U_{\max} = \eta |I|^2 / 8\pi^2$, και βρίσκουμε για την ισχύ ακτινοβολίας:

$$P_{rad} = U_{\max}\Delta\Omega = \frac{\eta |I|^2}{8\pi^2} 7.6581 = \frac{1}{2} R_{rad} |I|^2$$

και για την αντίσταση ακτινοβολίας:

$$R_{rad} = \frac{7.6581\eta}{4\pi^2} = 73.1\Omega \qquad (3.4.3)$$

Στην πράξη, αυτή η τιμή μπορεί εύκολα να συγκριθεί με την χαρακτηριστικήσύνθετης αντίστασης της γραμμής τροφοδοσίας. Ο κώδικας του Matlab που χρησιμοποιήθηκε για να υπολογιστεί η συνάρτηση κέρδους *g(θ),* όπως και η σταθερά c_n και η στερεά γωνία δέσμης είναι:

```
N = 200;
dth = pi / N;
th = (1:N-1)*dth;
g = ((cos(pi*L*cos(th)) - cos(pi*L))./sin(t)).^2;
th = [0,th];
g = [0,g];
cn = 1/max(g);
g = cn * g ;
Om = 2*pi*sum(g.*sin(th))*dth;
```

όπου η στερεά γωνία δέσμης υπολογίζεται από την προσέγγιση του ολοκληρώματος:

$$\Delta\Omega = 2\pi\int_0^{\pi} g(\theta)\sin\theta d\theta \approx 2\pi\sum_{i=0}^{N-1} g(\theta_i)\sin\theta_i\Delta\theta$$

όπου $\Delta\theta = \pi / N$ και $\theta_i = i\Delta\theta, i = 0,1,...,N-1.$

Αυτές οι διαδικασίες εκτελούνται από τις συναρτήσεις `dipole` και $\mathtt{d}_{\mathtt{max}}$. Για παράδειγμα το δεξί γράφημα στο σχήμα 3.4.1 και η D_{max} και ΔΩ δημιουργήθηκαν από τον κώδικα του Matlab:

```
[g,th,c] = dipole(0.5,200);
dbp(th,g,45,12);
[D,Omega] = dmax(th,g);
```

Το σχήμα 3.4.2 δείχνει τα κέρδη διαφόρων δίπολων διαφορετικών μηκών. Οι αντίστοιχες κατευθυντικότητες φαίνονται στο κάθε διάγραμμα.

3.5 Μονοπολικές κεραίες

Μια μονοπολική κεραία είναι μια μισή διπολική τοποθετημένη κατακόρυφα πάνω σε γειωμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5.1. Υποθέτοντας ότι το επίπεδο είναι απεριόριστο, και τέλεια αγώγιμο, το μονόπολο θα είναι ισοδύναμο με ένα δίπολο του οποίου το κάτω μισό είναι το είδωλο του πάνω μισού.

Έτσι, το διάγραμμα ακτινοβολίας (στο πάνω ημισφαίριο) θα είναι πανομοιότυπο με αυτό του δίπολου. Επειδή τα πεδία εκπέμπονται μόνο στο πάνω ημισφαίριο, η συνολική ισχύς που ακτινοβολείται θα είναι η μισή από ότι σε ένα δίπολο, και έτσι η αντίστοιχη αντίσταση ακτινοβολίας επίσης θα είναι η μισή:

$$P_{monopole} = \frac{1}{2}P_{dipole}, \qquad R_{monopole} = \frac{1}{2}R_{dipole}$$

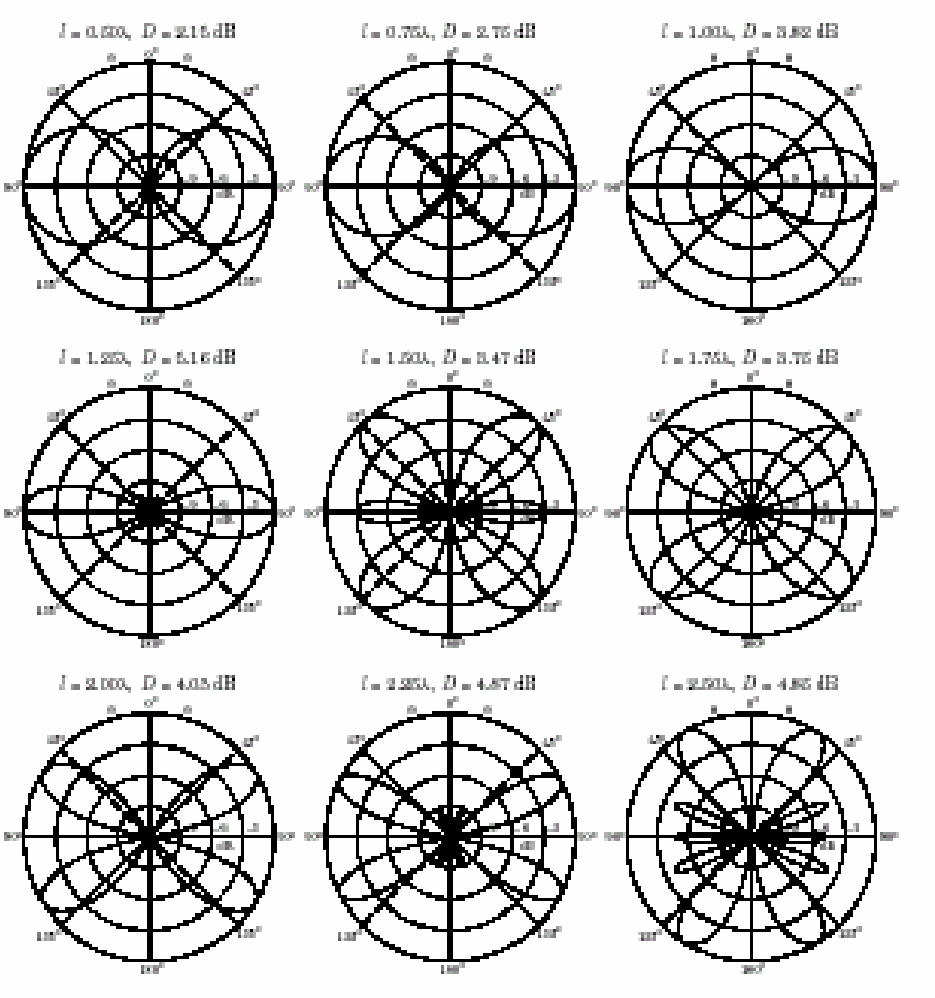
Ομοίως, η κατευθυντικότητα διπλασιάζεται επειδή η ισοτροπική ένταση ακτινοβολίας στον παρανομαστή της έκφρασης 2.2.2 γίνεται η μισή από την τιμή του δίπολου:

$$D_{monopole} = 2D_{dipole}$$

Το μονόπολο με μήκος κύματος ενός τετάρτου, δηλαδή $l = \lambda / 4$ είναι ίσως η πιο δημοφιλής κεραία. Για κεραίες που εκπέμπουν στην μπάντα των AM στα 300m ή σε συχνότητα 1Mhz, το ύψος τους θα είναι μεγάλο, $\lambda / 4 = 75m$ και απαιτούνται ειδικά καλώδια υποστήριξης.

Σε κινητές εφαρμογές στα 30cm ή σε συχνότητα 1GHz, το μήκος της κεραίας θα είναι αρκετά μικρό $\lambda / 4 = 7.5cm.$ Η οροφή ενός αυτοκινήτου παίζει το ρόλο του αγώγιμου επίπεδου σε αυτή την περίπτωση.

Σημειώνουμε επίσης στο σχήμα 3.4.2 ότι το δίπολο $l = 1.25\lambda = 10\lambda / 8$ έχει το μεγαλύτερο κέρδος. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μονόπολο σε κινητές εφαρμογές όπου απαιτούνται υψηλότερα κέρδη. Τέτοιες κεραίες ονομάζονται μονόπολα μήκους κύματος 5/8 επειδή το μήκος τους είναι: $l / 2 = 5\lambda / 8$.



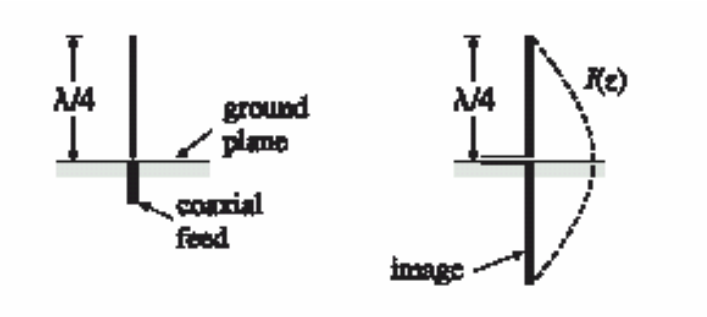
Σχήμα 3.4.2 Διαγράμματα ακτινοβολίας και κατευθυντικότητες δίπολου σταθερού μήκους κύματος.

3.6 Κεραίες οδεύοντος κύματος

Η ένταση ρεύματος της κεραίας στάσιμου κύματος μπορεί να θεωρηθεί σαν μια παλινδρομική κίνηση ρεύματος. Για παράδειγμα, το ρεύμα ενός δίπολου μισού μήκους κύματος μπορεί να παραστεί ως εξής:

$$I(z) = I\cos(kz) = \frac{I}{2}(e^{-jkz} + e^{jkz})$$

Η προς τα πίσω συνιστώσα μπορεί να εξαλειφθεί τερματίζοντας την γραμμική κεραία στην κατάλληλη αντίσταση φορτίου, όπως φαίνεται σο σχήμα 3.6.1. Η κεραία που προκύπτει ονομάζεται κεραία οδεύοντος κύματος ή κεραία *Beverage*. Το ρεύμα κατά μήκος μήκους της έχει τη μορφή:



Σχήμα 3.5.1 Μονόπολο μήκους κύματος ενός τετάρτου πάνω σε γειωμένο επίπεδο και το ισοδύναμο δίπολο μισού μήκους κύματος.

$$I(z) = Ie^{-jkz}, \qquad 0 \le z \le l \tag{3.6.1}$$

Το αντίστοιχο διάνυσμα ακτινοβολίας γίνεται:

$$F = \hat{z}\int_0^l Ie^{-jkz'}e^{jk\cos\theta z'}dz' = \hat{z}\frac{I}{jk}\frac{1-e^{-jkl(1-\cos\theta)}}{1-\cos\theta} \tag{3.6.2}$$

Η εγκάρσια θ συνιστώσα είναι:

$$F_\theta(\theta) = -F_z(\theta)\sin\theta = -\frac{I}{jk}\sin\theta\frac{1-e^{-2\pi jL(1-\cos\theta)}}{1-\cos\theta} \equiv -\frac{I}{jk}F(\theta) \tag{3.6.3}$$

όπου όπως παραπάνω $L = l/\lambda$ και $kl = 2\pi l/\lambda = 2\pi L$. Η ένταση ακτινοβολίας που βγαίνει από την εξίσωση 2.1.4 ή (3.1.7) γίνεται τώρα:

$$U(\theta) = \frac{\eta|I|^2}{32\pi^2}|F(\theta)|^2 = \frac{\eta|I|^2}{8\pi^2}\left|\frac{\sin\theta\sin(\pi L(1-\cos\theta))}{1-\cos\theta}\right|^2 \tag{3.6.4}$$

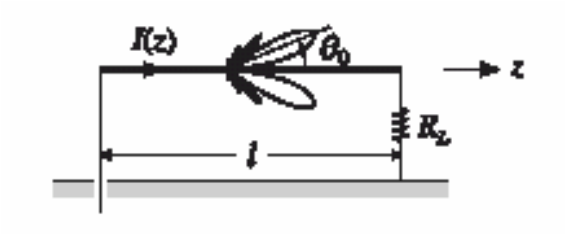
Επομένως, το κανονικοποιημένο κέρδος θα είναι:

$$g(\theta) = c_n\left|\frac{\sin\theta\sin(\pi L(1-\cos\theta))^2}{1-\cos\theta}\right| \tag{3.6.5}$$

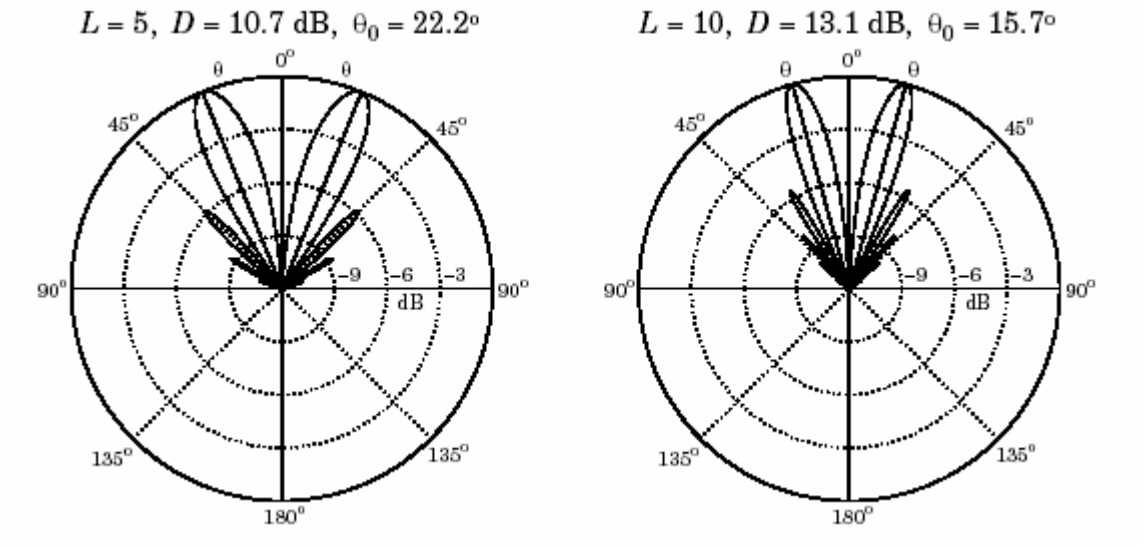
όπου c_n είναι μια σταθερά κανονικοποίησης. Το σχήμα (3.6.2) δείχνει τα κέρδη και τισκατευθυντικότητες στις περιπτώσεις που $l = 5\lambda$ και $l = 10\lambda$ ή *L=5* και *L=10*.

Η συνάρτηση του MATLAB `travel` υπολογίζει το κέρδος (3.6.5). Για παράδειγμα, το αριστερό γράφημα στο σχήμα 3.6.2 δημιουργήθηκε από τον κώδικα του Matlab:

```
[g,th,c.th0]=travel(5,400];
dbp(th,g,45,12);
addray(90-th0,'-'); addray(90+th0,'-');
```



Σχήμα 3.6.1 Κεραία οδεύοντος κύματος με τερματικό στοιχείο.



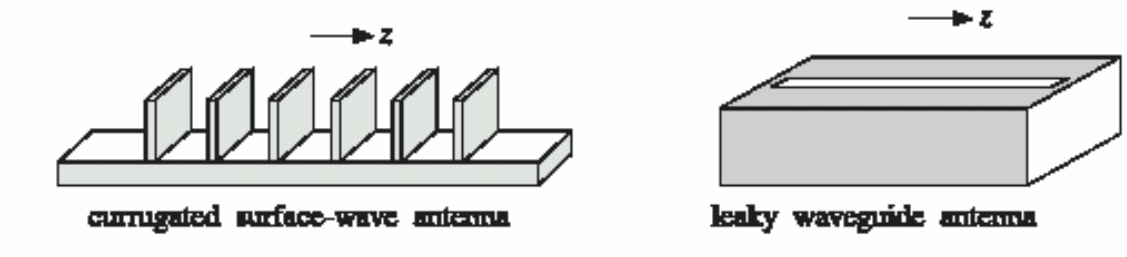
Σχήμα 3.6.2 Παραδείγματα κέρδους κεραιών οδεύοντος κύματος.

Όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος l τόσο περισσότερο οι κύριοι λοβοί κλίνουν προς την κατεύθυνση όδευσης της κεραίας. Οι κύριοι λοβοί προκύπτουν σχεδόν στην γωνία πόλωσης (σε Rad) [5-7]:

$$\theta_0 = \arccos\left(1 - \frac{0.371\lambda}{l}\right) = \arccos\left(1 - \frac{0.371}{L}\right) \qquad (3.6.6)$$

Για τα παραδείγματα του σχήματος 3.6.2 αυτή η έκφραση δίνει για *L=5* και *L=10,* $\theta_0 = 22.2^0$ και $\theta_0 = 15.7^0$. Καθώς το L αυξάνει, η γωνία θ_0 τείνει προς το μηδέν.

Υπάρχουν άλλες κατασκευές κεραιών που δρουν σαν κεραίες οδεύοντος κύματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6.3. Για παράδειγμα, ένας κυματοδηγός με μεγάλη σχισμή κατά μήκος του μήκους του, θα εκπέμπει συνεχώς κατά μήκος της σχισμής. Ένα άλλο παράδειγμα είναι μια αγώγιμη επιφάνεια με αυλάκια κατά μήκος της οποίας ένα επιφανειακό κύμα ταξιδεύει και εκπέμπεται όταν φτάνει στο τέρμα της κατασκευής.



Σχήμα 3.6.3 Κεραίες επιφανειακού μήκους κύματος και κεραίες μήκους κύματος με διαρροές.

Σε όλα αυτά τα παραδείγματα, το διάγραμμα ακτινοβολίας έχει μια γωνιακή εξάρτηση όμοια με αυτή μιας γραμμικής κεραίας με ρεύμα οδεύοντος κύματος από την φόρμα:

$$I(z) = Ie^{-j\beta z} = Ie^{-jpkz}, \quad 0 \le z \le l \tag{3.6.7}$$

όπου *β* είναι ο αριθμός κυμάτων κατά μήκος του κυματοδηγού και $p = \beta / k = c / v_{phase}$ είναι ο λόγος της ταχύτητας φωτός στο κενό προς την ταχύτητα φάσης κατά μήκος του οδηγού. Το αντίστοιχο διάγραμμα εκπεμπόμενης ισχύος θα έχει τώρα τη μορφή:

$$g(\theta) = c_n \left| \frac{\sin\theta \sin(\pi L(p - \cos\theta))}{p - \cos\theta} \right|^2 \tag{3.6.8}$$

Για μεγάλα μήκη *L* (και για *p<1*) έχει μέγιστη τιμή κατά μήκος της διεύθυνσης $\theta_0 = \arccos(p)$. Σημειωτέον ότι το p μπορεί να πάρει τιμές:

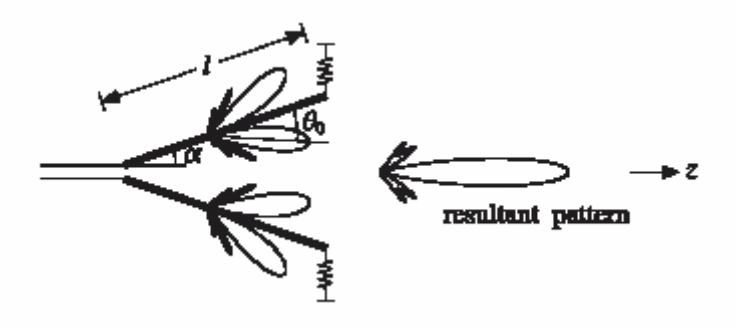
(a) $p > 1$ (αργά κύματα), όπως στην περίπτωση της κατασκευής με αυλάκια ή στην περίπτωση μιας κεραίας *Beverage* σε διηλεκτρικό,

(b) $p < 1$ (γρήγορα κύματα) όπως στην περίπτωση του κυματοδηγού με απώλειες, όπου $p - \sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega^2}$, και

(c) $p = 1$ για την κεραία *Beverage*.

3.7 Κεραίες σε σχήμα βε (V) και ρομβικές κεραίες

Μια κεραία σε σχήμα «βε» αποτελείται από δύο κεραίες οδεύοντος κύματος οι οποίες σχηματίζουν γωνία 2α ανάμεσά τους, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7.1. Μπορεί να κατασκευαστεί ανοίγοντας τα δύο άκρα ενός κυματοδηγού σε γωνία 2α (καθεμιά από τις τερματικές αντιστάσεις είναι $R_L / 2$ σε σύνολο R_L).



Σχήμα 3.7.1 Κεραία οδεύοντος κύματος σε σχήμα βε με $l=5\lambda$, $\theta_0=22.2^0$ και $\alpha=0.85\theta_0=18.9^0$.

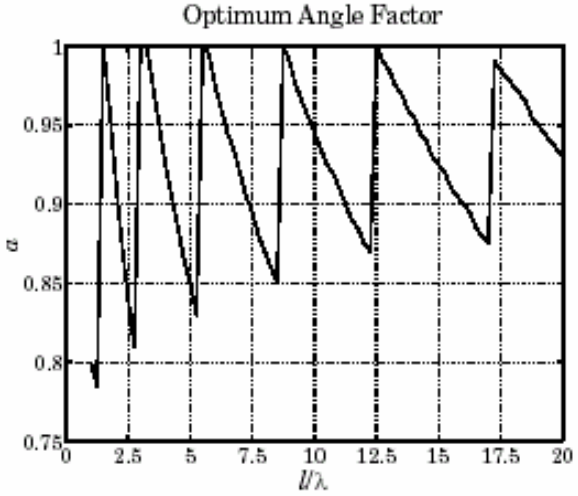
Επιλέγοντας την γωνία α να είναι σχεδόν ίση με την γωνία θ_0 του κύριου λοβού του σχήματος 3.6.6 οι δύο εσωτερικοί κύριοι λοβοί ευθυγραμμίζονται κατά μήκος της μεσαίας διεύθυνσης και παράγουν έναν ισχυρότερο λοβό, αυξάνοντας έτσι την κατευθυντικότητα της κεραίας. Οι εξωτερικοί κύριοι λοβοί θα υπάρχουν αλλά θα είναι μικρότεροι.

Η βέλτιστη γωνία α των βραχίονων της κεραίας βε εξαρτάται από το μήκος l και σχετίζεται με την γωνία θ_0 του κύριου λοβού μέσω της $\alpha=\alpha\theta_0$, όπου ο συντελεστής α τυπικά πέφτει στο εύρος $\alpha=0.80\text{-}1.00$. Το σχήμα 3.7.2 δείχνει τον συντελεστή α της βέλτιστης γωνίας που ανταποκρίνεται στην μέγιστη κατευθυντικότητα (στο επίπεδο της κεραίας βε) σαν συνάρτηση του μήκους l.

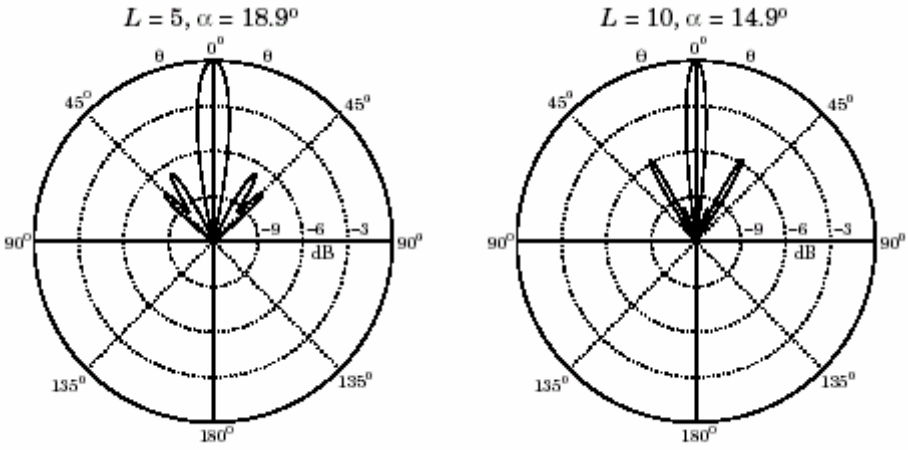
Το σχήμα 3.7.3 δείχνει τα πραγματικά διαγράμματα ακτινοβολίας για την περίπτωση $l=5\lambda$ και $l=10\lambda$. Οι γωνίες του κύριου λοβού ήταν $\theta_0=22.2^0$ και $\theta_0=15.7^0$. Οι βέλτοστες γωνίες ήταν περίπου (δες σχήμα 3.7.2*)* $\alpha=0.85\theta_0=18.9^0$ και $\alpha=0.95\theta_0=14.9^0$ στις δύο περιπτώσεις.

Το συνδυασμένο διάγραμμα ακτινοβολίας μπορεί να επιτευχθεί με την βοήθεια του σχήματος 3.7.4. Αν $\hat{z}_1$ και $\hat{z}_2$ είναι τα δύο ανύσματα κατά μήκος των δύο βραχίονων της κεραίας βε και θ_1, θ_2 είναι οι δύο γωνίες πόλωσης του σημείου προσέγγισης P σε σχέση με τις κατευθύνσεις $\hat{z}_1, \hat{z}_2$, τα υποτιθέμενα ρεύματα κατά μήκος των δύο βραχίονων έχουν αντίθετα πλάτη και είναι:

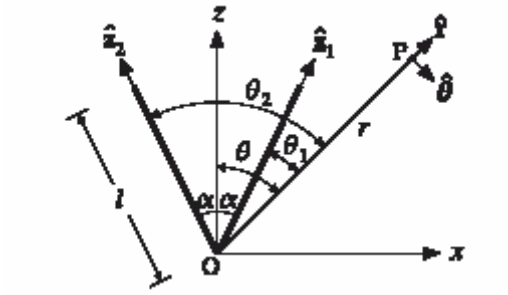
$$I_1(z_1) = Ie^{-jkz_1}, \quad I_2(z_2) = -Ie^{-jkz_2} \text{ , για } 0 \le z_1, z_2 \le l$$



Σχήμα 3.7.2 Ο καλύτερος παράγοντας γωνίας σε σχέση με το μήκος της κεραίας.



Σχήμα 3.7.3 Κέρδος κεραίας οδεύοντος κύματος σε σχήμα βε σε dB.



Σχήμα 3.7.4 Συντελεστές εκπομπής κεραίας οδεύοντος κύματος σε σχήμα βε.

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της εξίσωσης (3.6.2), τα διανύσματα ακτινοβολίας θα είναι:

$$F_1 = \hat{z}_1 \int_0^l I e^{-jkz'_1} e^{jk\cos\theta_1 z'_1} dz'_1 = \hat{z}_1 \frac{I}{jk} \frac{1-e^{-jkl(1-\cos\theta_1)}}{1-\cos\theta_1}$$

$$F_2 = \hat{z}_2 \int_0^l I e^{-jkz'_2} e^{jk\cos\theta_2 z'_2} dz'_2 = \hat{z}_2 \frac{I}{jk} \frac{1-e^{-jkl(1-\cos\theta_2)}}{1-\cos\theta_2}$$

Επομένως, οι συνιστώσες θ θα είναι όπως στην εξίσωση (3.6.3):

$$F_{1\theta} = -\frac{I}{jk} F(\theta_1), \qquad F_{2\theta} = -\frac{I}{jk} F(\theta_2)$$

όπου η συνάρτηση *F(θ)* καθορίστηκε στην εξίσωση (3.6.3). Από το σχήμα 3.7.4 μπορούμε να εκφράσουμε τα θ_1 , θ_2 σε σχέση με τη γωνία πόλωσης θ στον άξονα z ως:

$$\theta_1 = \theta - a, \qquad \theta_2 = \theta + a$$

Προσθέτοντας τις συνιστώσες θ, παίρνουμε το αποτέλεσμα:

$$F_\theta = F_{1\theta} + F_{2\theta} = \frac{I}{jk}\left[F(\theta_2) - F(\theta_1)\right] = \frac{I}{jk}\left[F(\theta + a) - F(\theta - a)\right]$$

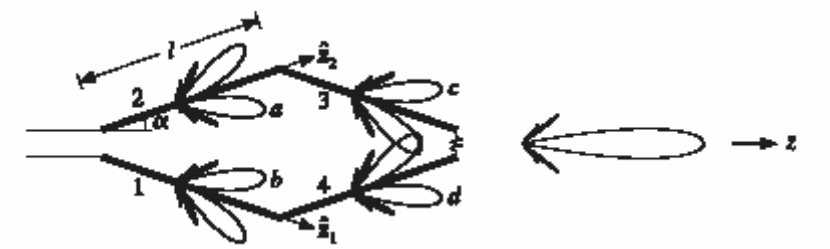
Έτσι, η ένταση ακτινοβολίας θα είναι:

$$U(\theta) = \frac{\eta k^2}{32\pi^2}\left|F_\theta(\theta)\right|^2 = \frac{\eta\,|I|^2}{32\pi^2}\left|F(\theta + a) - F(\theta - a)\right|^2$$

και η κανονικοποιημένη ισχύς:

$$g(\theta) = c_n\,|F(\theta + a) - F(\theta - a)|^2 \qquad (3.7.1)$$

Στο σχήμα 3.7.3 απεικονίζεται το κέρδος και μπορεί να υπολογιστεί από την συνάρτηση του MATLAB `vee`. Τέλος θεωρούμε εν συντομία μια ρομβική κεραία κατασκευασμένη από δύο αλυσιδωτά συνδεμένες κεραίες βε, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7.5. Τώρα οι δύο εσωτερικοί κύριοι λοβοί της πρώτης κεραίας βε (λοβοί a, b) και οι δύο εξωτερικοί λοβοί της δεύτερης (λοβοί c, d) ευθυγραμμίζονται αυξάνοντας έτσι τις κατευθυντικότητες του συστήματος των κεραιών.



Σχήμα 3.7.5 Ρομβική κεραία από κεραίες οδεύοντος κύματος.

Τα διανύσματα ακτινοβολίας F_3 και F_4 των βραχιόνων 3 και 4 μπορούν να οριστούν, σημειώνοντας ότι αυτοί οι βραχίονες είναι ο μετασχηματισμός των βραχιόνων 1 και 2 και έτσι τα διανύσματα ακτινοβολίας αλλάζουν με τους κατάλληλους παράγοντες αλλαγής φάσης.

Ο βραχίονας 3 είναι ο μετασχηματισμός του βραχίονα 1 με τα διανύσματα $d_2 = l\hat{z}_2$ και ο βραχίονας 4 είναι ο μετασχηματισμός του βραχίονα 2 με το διάνυσμα $d_1 = l\hat{z}_1$. Έτσι, τα αντίστοιχα διανύσματα ακτινοβολίας θα είναι:

$$F_3 = -e^{jk\cdot d_2}F_1, \qquad F_4 = -e^{jk\cdot d_1}F_2 \qquad (3.7.2)$$

όπου τα αρνητικά πρόσημα εμφανίζονται διότι το ρεύμα σε αυτούς τους βραχίονες έχει αντίθετο πρόσημο με τα παράλληλα ισοδύναμα.
Οι παράγοντες μεταφοράς φάσης είναι:

$$e^{jk\cdot d_2} = e^{jkl\hat{r}\cdot\hat{z}_2} = e^{jkl\cos\theta_2}, \qquad e^{jk\cdot d_1} = e^{jkl\hat{r}\cdot\hat{z}_1} = e^{jkl\cos\theta_1}$$

Έπεται ότι οι θ-συνιστώσες των F_3 και F_4 είναι:

$$F_{3\theta} = -e^{jkl\cos\theta_2} F_{1\theta} = \frac{I}{jk} e^{jkl\cos\theta_2} F(\theta_1)$$

$$F_{4\theta} = -e^{jkl\cos\theta_1} F_{2\theta} = \frac{I}{jk} e^{jkl\cos\theta_1} F(\theta_2)$$

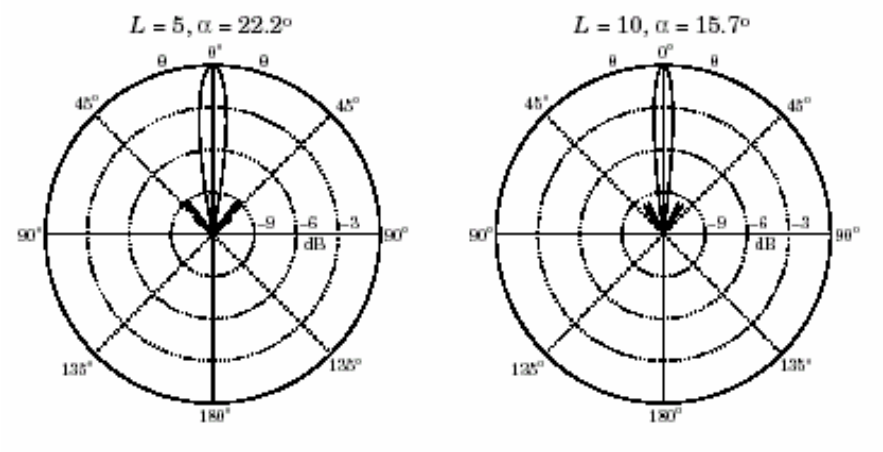
Έτσι η τελική θ-συνιστώσα θα είναι:

$$F_\theta = F_{1\theta} + F_{2\theta} + F_{3\theta} + F_{4\theta} = \frac{I}{jk}\left[F(\theta_2) - F(\theta_1) + e^{jkl\cos\theta_2} F(\theta_1) - e^{jkl\cos\theta_1} F(\theta_2)\right]$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα κανονικοποιημένης ισχύος θα είναι:

$$g(\theta) = c_n \,|\, F(\theta + a) - F(\theta - a) + e^{jkl\cos(\theta+a)} F(\theta - a) - e^{jkl\cos(\theta-a)} F(\theta + a) \,|^2$$

Το σχήμα 3.7.6 δείχνει το κέρδος ισχύος *g(θ)* για τις περιπτώσεις *L=5* και *L=10*. Η καλύτερη γωνία βε και στις δύο περιπτώσεις βρέθηκε ότι είναι $\alpha=\theta_0$, δηλαδή $\alpha=22.2^0$ και $\alpha=15.7^0$. Η συνάρτηση `rombic` μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμηθεί αυτή η έκφραση.



Σχήμα 3.7.6 Κέρδη ρομβικής κεραίας σε dB.

3.8 Κεραίες βρόγχου

Το σχήμα 3.8.1 δείχνει μια κυκλική και μια τετραγωνική κεραία βρόγχου. Τα σημεία τροφοδοσίας δεν φαίνονται. Το κύριο χαρακτηριστικό εδώ είναι ότι ο βρόγχος διαρρέεται συνεχώς από ρεύμα. Κυρίως μας ενδιαφέρει η περίπτωση που η διάσταση του βρόγχου (πχ. η περιφέρειά του) είναι μικρότερη σε σχέση με το μήκος κύματος.

Για τέτοιους μικρούς βρόγχους, το διάγραμμα ακτινοβολίας θα είναι σχεδόν ανεξάρτητο από το σχήμα του βρόγχου και το διάνυσμα ακτινοβολίας παίρνει την απλή μορφή:

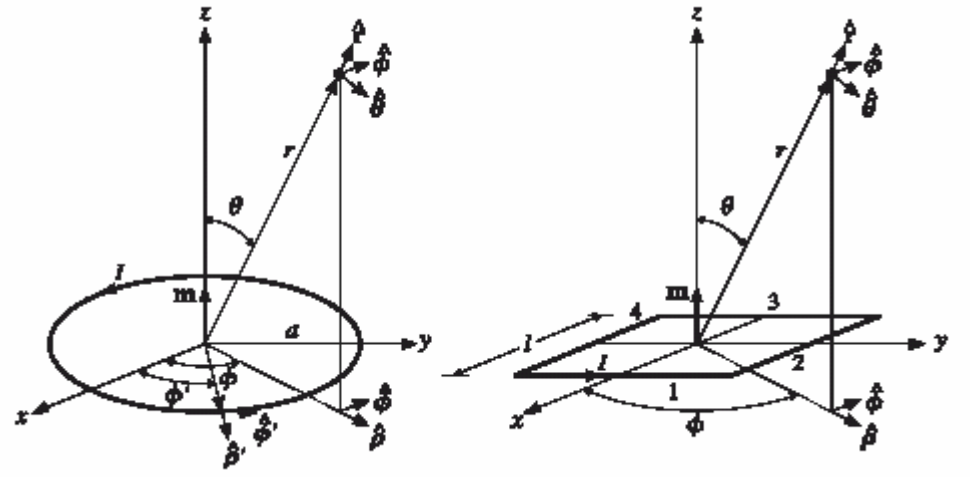
$$F = jm \times k \tag{3.8.1}$$

όπου m είναι η μαγνητική ορμή του βρόγχου που καθορίζεται σε σχέση με το σχήμα 3.8.1 ως ακολούθως:

$$m = \hat{z}\, IS\,, \quad \text{(μαγνητική ορμή)} \tag{3.8.2}$$

όπου S είναι το πεδίο του βρόγχου. Γράφοντας $k = k\,\hat{r}$ και σημειώνοντας ότι $\hat{z} + \hat{r} = \hat{\phi}\sin\theta$, έχουμε:

$$F = jm \times k = jmk \sin\theta\, \hat{\phi} \equiv F_\phi(\theta)\phi \tag{3.8.3}$$



Σχήμα 3.8.1 Κυκλικές και τετραγωνικές κεραίες.

Έτσι, το F είναι κάθετο στο $\hat{r}$ έτσι ώστε F_1=F. Έπεται από την εξίσωση (1.10.4) ότι τα παραγόμενα πεδία ακτινοβολίας θα είναι:

$$E = \hat{\phi}\, E_\phi = -jk\eta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} E_\phi\, \hat{\phi} = \eta m k^2 \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\hat{\phi}$$

$$H = \hat{\theta}\, H_\theta = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} F\phi\, \hat{\theta} = -mk^2 \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\hat{\theta}$$

(3.8.4)

Η ένταση ακτινοβολίας της εξίσωσης 2.1.4 σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$\boxed{U(\theta,\phi)=\frac{\eta k^2}{32\pi^2}\,|F_\phi|^2=\frac{\eta k^4\,|m|^2}{32\pi^2}\sin^2\theta} \quad \text{(ένταση βρόγχου)} \qquad (3.8.5)$$

Έτσι, έχει την ίδια γωνιακή εξάρτηση με $sin^2\theta$, κανονικοποιημένη αύξηση ισχύος και κατευθυντικότητα όπως το δίπολο Hertz. Ονομάζουμε τέτοιες κεραίες μικρού βρόγχου σαν «βρόγχους Hertz» αναφερόμενοι στο μικροσκοπικό μέγεθός τους. Η συνολική εκπεμπόμενη ισχύς μπορεί να υπολογιστεί όπως στην παράγραφο 3.2. Έχουμε:

$$P_{rad}=U_{\max}\Delta\Omega=\frac{\eta k^4\,|m|^2}{32\pi^2}\frac{8\pi}{12\pi}$$

Αντικαθιστώντας *m* με *IS* μπορούμε να έχουμε την αντίσταση εκπομπής του βρόγχου από την έκφραση:

$$P_{rad}=\frac{1}{2}R_{rad}\,|I|^2=\frac{\eta k^4\,|IS|^2}{12\pi} \qquad \Rightarrow \qquad R_{rad}=\frac{\eta k^4 S^2}{6\pi}$$

Συγκρίνοντας την έκφραση (3.8.4) με το δίπολο Hertz, το ηλεκτρικό πεδίο του βρόγχου είναι στην διεύθυνση Φ, όπως του δίπολου Hertz είναι στην διεύθυνση θ. Τα σχετικά πλάτη των ηλεκτρικών πεδίων είναι:

$$\frac{E_\theta^{dipole}}{E_\phi^{loop}}=j\frac{Ii}{mk}$$

Αν επιλέξουμε $Il=mk$, τότε τα ηλεκτρικά πεδία είναι πίσω σε φάση 90^0. Αν ένα τέτοιο δίπολο Hertz και βρόγχος τοποθετηθούν στην αρχή των συντεταγμένων, το παραγόμενο ηλεκτρικό πεδίο θα είναι πολωμένο κυκλικά. Σημειώνουμε τελικά ότι ο βρόγχος μπορεί να έχει διάφορες περιστροφές, αυξάνοντας έτσι την αντίσταση ακτινοβολίας και την ισχύ που εκπέμπεται. Για ένα βρόγχο με *n* περιστροφές, πρέπει να κάνουμε την αντικατάσταση $m \to nm$.

3.9 Κυκλικοί βρόγχοι

Στη συνέχεια μελετάμε τον κυκλικό βρόγχο με περισσότερες λεπτομέρειες και δημιουργείται η εξίσωση (3.8.3). Θεωρώντας ένα απείρως λεπτό καλώδιο σε σχήμα κύκλου ακτίνας α, η παραγόμενη ένταση ρεύματος μπορεί να εκφραστεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες όπως στην εξίσωση (3.1.3):

$$J(r') = I\,\hat{\phi}'\,\delta(\rho'-a)\delta(z')$$

Το διάνυσμα ακτινοβολίας θα είναι:

$$F = \int_v J(r')e^{jk\cdot r'}d^3r' = \int I\,\hat{\phi}'\,e^{jk\cdot r'}\delta(\rho'-a)\delta(z')\rho'\,d\rho'\,d\phi'\,dz' \qquad (3.9.1)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.8.2) έχουμε:

$$\begin{aligned} k\cdot r' &= k(\hat{z}\cos\theta + \hat{\rho}\sin\theta)\cdot(z'\hat{z}'+\rho'\hat{\rho}') \\ &= kz'\cos\theta + k\rho'\sin\theta(\hat{\rho}'\cdot\rho) \\ &= kz'\cos\theta + k\rho'\sin\theta\cos(\phi'-\phi) \end{aligned}$$

όπου θέτουμε $\hat{\rho}'\cdot\hat{\rho} = \cos(\phi'-\phi),$ όπως βλέπουμε στην (3.8.1). Το ολοκλήρωμα της σχέσης 3.9.1 περιορίζει το *r'* στο επίπεδο *xy* και θέτει $\rho'=\alpha$ και $z'=0.$ Έτσι έχουμε:

$$k\cdot r' = ka\sin\theta\cos(\phi'-\phi)$$

Έπειτα το διάνυσμα ακτινοβολίας (3.9.1) γίνεται:

$$F = Ia\int_0^{2\pi}\hat{\phi}'\,e^{jka\sin\theta\cos(\phi'-\phi)}d\phi' \qquad (3.9.2)$$

Σημειώνουμε στο σχήμα 3.8.1 ότι το διάνυσμα $\hat{\phi}'$ αλλάζει στην διεύθυνση με το ϕ'. Έτσι αποδεικνύεται βολικό να εκφραστεί με όρους $\hat{\phi},\hat{\rho}$. Επιλύνοντας το $\hat{\phi}'$ σε διευθύνσεις $\hat{\phi},\hat{\rho}$, έχουμε:

$$\hat{\phi}' = \hat{\phi}\cos(\phi'-\phi) - \hat{\rho}\sin(\phi'-\phi)$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές του ολοκληρώματος από ϕ' σε $\psi = \phi'-\phi$, από την εξίσωση 3.9.2 προκύπτει:

$$F = Ia\int_0^{2\pi}(\hat{\phi}\cos\psi - \hat{\rho}\sin\psi)e^{jka\sin\theta\cos\psi}\,d\psi$$

Απλοποιώντας έχουμε:

$$F = Ia\,\hat{\phi}\int_0^{2\pi}\cos\psi e^{jka\sin\theta\cos\psi}\,d\psi \qquad (3.9.3)$$

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της συνάρτησης Bessel $J_1(x)$,

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi j}\int_0^{2\pi}\cos\psi e^{jx\cos\psi}\,d\psi$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα ψ με $2\pi jJ_1(ka\sin\theta)$ και η συνάρτηση 3.9.3 γράφεται:

$$F = F_\phi\,\hat{\phi} = 2\pi jIaI_1(ka\sin\theta)\,\hat{\phi} \qquad (3.9.4)$$

Αυτή δίνει το διάνυσμα ακτινοβολίας για βρόγχο οποιασδήποτε ακτίνας. Αν ο βρόγχος είναι ηλεκτρικά μικρός, δηλαδή $ka<<1$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση $J_1(x)\cong x/2$ και έτσι παίρνουμε:

$$F = F_\phi\,\hat{\phi} = 2\pi jIa\frac{1}{2}ka\sin\theta\,\hat{\phi} = jI\pi a^2k\sin\theta\,\hat{\phi} \qquad (3.9.5)$$

που συμφωνεί με την εξίσωση (3.8.3) με $m=IS=I\pi\alpha^2$.

3.10 Τετραγωνικοί βρόγχοι

Ο τετραγωνικός βρόγχος του σχήματος 3.8.1 μπορεί να θεωρηθεί σαν τέσσερις χωριστές γραμμικές κεραίες οι οποίες αποτελούν τις τέσσερις πλευρές. Θεωρώντας ότι η κάθε πλευρά είναι ένα δίπολο Hertz και ότι οι πλευρές είναι σε αποστάσεις $\pm l/2$ από την αρχή, μπορούμε να γράψουμε τις πυκνότητες ρεύματος των πλευρών 1,2,3,4 ως εξής:

$$J_1(r) = \hat{y}\,Il\delta(x-l/2)\delta(y)\delta(z)$$
$$J_2(r) = \hat{x}\,Il\delta(x)\delta(y-l/2)\delta(z)$$
$$J_3(r) = \hat{y}\,Il\delta(x+l/2)\delta(y)\delta(z)$$
$$J_4(r) = \hat{x}\,Il\delta(x)\delta(y+l/2)\delta(z)$$

Τα ρεύματα στις παράλληλες πλευρές 1 και 3 συνδυάζονται και δίνουν:

$$J_1(r)+J_3(r)=-Il^2\,\hat{y}\left[\frac{\delta(x+l/2)-\delta(x-l/2)}{l}\right]\delta(y)\delta(z)$$

όπου πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τον παράγοντα l. Όταν το l είναι πολύ μικρό (αμελητέο), μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ποσότητα μέσα στην παρένθεση με την παράγωγο $\delta'(x)$ της συνάρτησης δέλτα $\delta(x)$:

$$J_1(r)+J_3(r)=-Il^2\,\hat{y}\,\delta'(x)\delta(y)\delta(z)$$

Ομοίως βρίσκουμε για τις πλευρές 2 και 4:

$$J_2(r)+J_4(r)=-Il^2\,\hat{x}\,\delta(x)\delta'(y)\delta(z)$$

Έτσι, η πυκνότητα ρεύματος για όλες τις πλευρές είναι:

$$J(r)=Il^2\left[\hat{x}\,\delta(x)\delta'(y)-\hat{y}\,\delta'(x)\delta(y)\right]\delta(z) \qquad (3.10.1)$$

Το αντίστοιχο διάνυσμα ακτινοβολίας θα είναι:

$$F=Il^2\int\left[\hat{x}\,\delta(x')\delta'(y')-\hat{y}\,\delta'(x')\delta(y')\right]\delta(z')e^{j(k_x x'+k_y y'+k_z z')}\,dx'\,dy'\,dz'$$

Οι ολοκληρώσεις της συνάρτησης δέλτα μπορούν να γίνουν εύκολα δίνοντας:

$$F=Il^2(-jk_y\,\hat{x}+jk_x\,\hat{y})$$

Χρησιμοποιώντας την (3.1.4) πετυχαίνουμε:

$$F=jIl^2k\sin\theta(-\hat{x}\sin\phi+\hat{y}\cos\phi)=jIl^2k\sin\theta\,\hat{\phi} \qquad (3.10.2)$$

που συμφωνεί με την εξίσωση (3.8.3) με $m=IS=Il^2$.

3.11 Ακτινοβολία δίπολου και τετράπολου

Το διάνυσμα ακτινοβολίας F μιας κατανομής ρεύματος/φορτίου μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά αναλύοντας το εκθετικό $e^{jk\cdot r'}$ σε δυνάμεις του k:

$$F=\int_v J(r')e^{jk\cdot r'}d^3r'=\int_v\left[1+jk\cdot r'+\frac{1}{2!}(jk\cdot r')^2+\ldots\right]J(r')d^3r'$$

$$=\underbrace{\int_v J(r')d^3r'}_{\text{ηλεκ.δίπολο}}+\underbrace{\int_v j(k\cdot r')J(r')d^3r'}_{\text{μαγν.δίπολο\&ηλεκ.τετράπολο}}+\ldots \qquad (3.11.1)$$

Ο πρώτος όρος είναι η ακτινοβολία του ηλεκτρικού δίπολου και αναφέρεται σε δίπολο Hertz. Ο δεύτερος όρος συνδυάζει τους όρους του μαγνητικού δίπολου (αναφέρεται σε κεραία βρόγχου Hertz) και του ηλεκτρικού τετράπολου.

Μεγαλύτερα πολύπολα δημιουργούνται από όρους μεγαλύτερης τάξεως στην παραπάνω έκφραση. Μια αποτελεσματική συζήτηση για τις ακτινοβολίες των πολύπολων απαιτεί την χρήση σφαιρικών αρμονιών.

Διατηρώντας μόνο μερικούς από τους όρους της παραπάνω έκφρασης, αποτελεί μια καλή προσέγγιση του F παρέχοντας $kr'<<1$ ή $l<<\lambda$ όπου l είναι η τυπική διάσταση της πηγής ρεύματος. Γενικά, κάθε εκπεμπόμενο σύστημα θα εκπέμπει ακτινοβολία πολλών τύπων πολύπολων.

Οι ροπές ενός ηλεκτρικού δίπολου και ηλεκτρικού τετράπολου μιας κατανομής φορτίου καθορίζονται από όρους των ακόλουθων πρώτης και δεύτερης τάξης ροπών της πυκνότητας φορτίου:

$$p = \int_v r' \rho(r') d^3 r' \qquad \text{(ροπή ηλεκτρικού δίπολου)} \tag{3.11.2}$$

$$D_{ij} = \int_v r'_i \, r'_j \, \rho(r') d^3 r' \quad \text{(ροπή ηλεκτρικού τετράπολου)} \tag{3.11.3}$$

Η ταυτότητα του προβλήματος (13.2) είναι χρήσιμη εδώ στον υπολογισμό των διαδοχικών όρων του F. Θέτοντας την ταυτότητα με δύο επιλογές: $g(r') = r'_i$ και $g(r') = r'_i \, r'_j$, πετυχαίνουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} &\int_v J_i d^3 r' = j\omega \int_v r'_i \, \rho(r') d^3 r' = j\omega p_i \\ &\int_v (r'_i \, J_j + r'_j \, J_i) d^3 r' = j\omega \int_v r'_i \, r'_j \, \rho(r') d^3 r' = j\omega D_{ij} \end{aligned} \tag{3.11.4}$$

Έτσι, ο τελευταίος όρος στην εξίσωση (3.11.1) είναι το ηλεκτρικό δίπολο:

$$\int_v J(r') d^3 r' = j\omega p = F_{el}$$

Στον δεύτερο όρο της εξίσωσης (3.11.1) μπορούμε να θέσουμε την διανυσματική ταυτότητα:

$$(k \cdot r') J = \frac{1}{2} (r' \times J) \times k + \frac{1}{2} \left[(k \cdot r') J + (k \cdot J) r' \right]$$

και σε μορφή ολοκληρώματος:

$$\int_v (k \cdot r') J d^3 r' = \frac{1}{2} \int_v (r' \times J) \times k d^3 r' + \frac{1}{2} \int_v \left[(k \cdot r') J + (k \cdot J) r' \right] d^3 r' \tag{3.11.5}$$

Η μαγνητική ροπή μιας κατανομής ρεύματος καθορίζεται γενικά από:

$$m = \frac{1}{2} \int_v r' \times J(r') d^3 r' \qquad \text{(μαγνητική ροπή)} \tag{3.11.6}$$

Έτσι, ο πρώτος όρος στην εξίσωση (3.11.5) μπορεί να γραφτεί ως mxk. Με την βοήθεια της δεύτερης ταυτότητας της εξίσωσης (3.11.4), ο τελευταίος όρος της (3.11.5) μπορεί να γραφεί σε όρους της μητρικής D του τετράπολου ενεργώντας στον παράγοντα k. Έτσι, έχουμε για τον δεύτερο όρο της έκφρασης (3.11.1):

$$\int_v j(k\cdot r')Jd^3r' = jm\times k - \frac{1}{2}\omega Dk = F_{mag} + F_{quad} \tag{3.11.7}$$

Έτσι, οι τρεις χαμηλότερες τάξεως όροι του F είναι:

$$\boxed{F = F_{el} + F_{mag} + F_{quad} = j\omega p + jm\times k - \frac{1}{2}\omega Dk} \tag{3.11.8}$$

Εν συντομία αναλύουμε κάθε όρο. Για ένα δίπολο Hertz με $J(r') = \hat{z}\, Il\delta^3(r')$, μόνο ο πρώτος όρος της (3.11.8) είναι μη μηδενικός και είναι ο ίδιος όπως της παραγράφου 3.2:

$$F_{el} = \int_v J(r')d^3r' = \hat{z}\, Il = j\omega p$$

Η σχέση $Il = j\omega p$ μπορεί να γίνει κατανοητή θεωρώντας το δίπολο Hertz σαν δύο αντίθετα εναλλασσόμενα με το χρόνο φορτία $\pm q$ σε απόσταση l μεταξύ τους (κατά μήκος της διεύθυνσης z), έτσι ώστε $p=ql$. Έπεται ότι $j\omega p = \dot{p} = \dot{q}\, l = Il$.

Το αποτέλεσμα $p=ql$ μπορεί επίσης να τεθεί στην περίπτωση ενός επιταχυνόμενου φορτίου. Σ' αυτή την περίπτωση q είναι σταθερό αλλά το l μεταβάλλεται με το χρόνο. Έχουμε $\dot{p} = q\dot{l} = qv$ και $\ddot{p} = q\dot{v} = qa$, όπου α είναι η επιτάχυνση $a = \dot{v}$. Για αρμονική εξάρτηση με το χρόνο, έχουμε: $(j\omega)^2 p = qa$. Η συνολική εκπεμπόμενη ισχύς από ένα δίπολο επιτεύχθηκε στην εξίσωση (3.2.2). Θέτοντας $k^2 |Il|^2 = k^2 |qv|^2 = q^2\omega^2 |v|^2 / c^2 = q^2 |a|^2 / c^2$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την (3.2.2) με τη μορφή:

$$p = \frac{\eta q^2 |a|^2}{12\pi c^2} = \frac{\eta q^2 a^2_{rms}}{6\pi c^2}$$

όπου $a_{rms} = |a|/\sqrt{2}$ είναι η τιμή rms της επιτάχυνσης. Αυτή είναι η κλασική έκφραση Larmor για την εκπεμπόμενη ισχύ από ένα μη σχετικό επιταχυνόμενο φορτίο.

Για ένα βρόγχο Hertz μόνο ο όρος της μαγνητικής ροπής παρουσιάζεται στην F. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα ότι $m = \hat{z}\, IS$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.11.6). Όντως για έναν κυκλικό βρόγχο:

$$m = \frac{1}{2}\int r'\times[I\hat{\phi}'\delta(\rho'-a)\delta(z')]\rho' d\rho' d\phi' dz'$$

Τα ολοκληρώματα πάνω από z' και ρ' τείνουν $z'=0$ και $\rho'=\alpha$ και έτσι $r' = a\hat{\rho}'$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{\rho}'\times\hat{\phi}' = \hat{z}$ και ότι η ολοκλήρωση του ϕ' παράγει έναν παράγοντα 2π, πετυχαίνουμε:

$$m = \frac{1}{2} a \hat{\rho}' \times \hat{\phi}' Ia2\pi = \hat{z} I(\pi a^2)$$

Ομοίως, εισάγοντας την εξίσωση (3.10.1) στην (3.11.6) βρίσκουμε για τον τετραγωνικό βρόγχο:

$$m = \frac{1}{2} \int (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) \times [Il^2 (\hat{x} \delta(x)\delta;(y) - \hat{y} \delta'(x)\delta(y))\delta(z)]dxdydz = \hat{z} Il^2$$

Για τον όρο του ηλεκτρικού τετράπολου η μητρική D μερικές φορές αντικαθίσταται από εκδόσεις ης που καθορίζονται από

$$Q_{ij} = 3D_{ij} - \delta_{ij} tr(D) = \int_v (3r_i' r_j' - \delta_{ij} r' \cdot r') \rho(r') d^3 r' \qquad \Rightarrow \qquad Q = 3D - Itr(D)$$

έτσι ώστε $t_r(Q)=0$. Σε αυτή την περίπτωση, ο παράγοντας D_k μπορεί να εκφραστεί ως:

$$Dk = \frac{1}{3} Qk + \frac{1}{3} tr(D)k$$

Ο δεύτερος όρος μπορεί να αγνοηθεί επειδή δεν συντελεί στα πεδία εκπομπής, που εξαρτώνται μόνο από το μέρος του F αντίστροφο του k. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε:

$$F = j\omega p + jm \times k - \frac{1}{6} \omega Qk$$

Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά δίπολα έχουν γωνιακά διαγράμματα κέρδους που είναι όμοια με των δίπολων Hertz και των βρόγχων Hertz, που είναι $sin^2\theta$. Το τετράπολο από την άλλη μπορεί να έχει πολύπλοκο γωνιακό διάγραμμα όπως φαίνεται εκφράζοντας τον παράγοντα $Qk = kQ\hat{r}$ αυστηρά σε όρους των γωνιών θ, φ:

$$Q\hat{r} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Κεφάλαιο 4

Οι ρευματικές κατανομές στις γραμμικές κεραίες.

4.1 Ολοκληρώματα Hallen και Pocklington.

Στο κεφάλαιο 1.4 καθορίσαμε τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που παράγονται από μια δεδομένη διανομή εντάσεων σε μια λεπτή γραμμική κεραία, αλλά δεν συζητήσαμε για τον μηχανισμό με τον οποίο η διανομή εντάσεων ρευμάτων δημιουργείται και διατηρείται. Στο κεφάλαιο 3 υποθέσαμε ότι οι εντάσεις ήταν ημιτονοειδείς, αλλά αυτό ήταν μόνο μια προσέγγιση. Εδώ θα συζητήσουμε τις εξισώσεις ολοκληρωμάτων που καθορίζουν τον ακριβή τύπο των εντάσεων αυτών.

Μια κεραία, είτε εκπέμπει είτε λαμβάνει, πάντα εγείρεται από ένα εξωτερικό πεδίο. Σε κατάσταση εκπομπής, η κεραία διεγείρεται από μια πηγή τάσης που εφαρμόζεται στους ακροδέκτες εισόδου, και σε κατάσταση λήψης, από ένα επικείμενο ηλεκτρικό πεδίο (τυπικά, από ένα ομοιόμορφο απλό κύμα, εάν προέρχεται από μακρινή απόσταση). Σε κάθε περίπτωση θα αναφερόμαστε σε αυτή την εξωτερική πηγή πεδίου ως το επικείμενο πεδίο E_{in} .

Το επικείμενο πεδίο E_{in} παράγει μια ένταση ρεύματος στην κεραία. Με τη σειρά της, η ένταση παράγει το δικό της πεδίο E το οποίο εκπέμπεται μακριά. Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι το άθροισμα $E_{tot} = E + E_{in}$. Υποθέτοντας μια τέλεια αγώγιμη κεραία, οι περιοριστικές συνθήκες είναι ότι οι εφαπτομενικοί συντελεστές του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου, εξαφανίζονται στην επιφάνεια της κεραίας. Αυτές οι περιοριστικές συνθήκες είναι αρκετές για να καθορίσουν την διανομή εντάσεων που παράγονται από την κεραία.

Το σχήμα 4.1.1 φωτογραφίζει μια λεπτή κυλινδρική κεραία κατά άξονα z, μήκους l και ακτίνας α, με μια διανομή έντασης $I(z)$ κατά μήκος της. Θα επικεντρωθούμε μόνο στο διάνυσμα E_z του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από την συγκεκριμένη ένταση και χρησιμοποιεί κυλινδρικές συντεταγμένες.

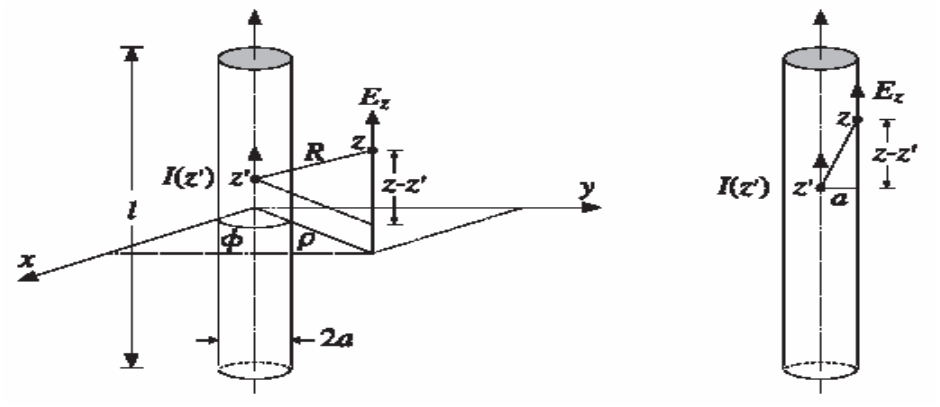
Για μια τέλεια αγώγιμη κεραία, η ένταση είναι ουσιαστικά μια επιφανειακή ένταση σε ακτίνα ρ=α και επιφανειακή πυκνότητα $J_s(z) = \hat{z} I(z)/2\pi a$. Η αντίστοιχη πυκνότητα έντασης της περιοχής θα είναι αυτή της εξίσωσης (1.4.2) :

$$J(r) = J_s(z)\delta(\rho - \alpha) = \hat{z} I(z)\delta(\rho - a)\frac{1}{2\pi a}$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία του κεφαλαίου 1.4, παίρνουμε τον παράγοντα κατά άξονα z του διανύσματος:

$$A_z(z,\rho,\phi) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{v'} \frac{I(z')\delta(\rho' - a)e^{-jkR}}{2\pi a R}\rho' d\rho' d\phi' dz'$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\int_{0}^{2\pi} \frac{I(z')e^{-jkR}}{2\pi R} d\phi' dz'$$



Σχήμα 4.1.1 Λεπτό-καλώδιο μοντέλο κυλινδρικής κεραίας.

όπου $R=|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|=\sqrt{(z-z')^2+|\rho-\rho'|^2}$. Επειδή $\rho'=a$, έχουμε:

$$|\rho-\rho'|^2=\rho^2+a^2-2\rho\cdot\rho'=\rho^2+a^2-2\rho a\cos(\phi'-\phi)$$

Επειδή ο παράγοντας φ΄ εμφανίζεται μόνο στη διαφορά $\phi'-\phi$, μπορούμε να αλλάξουμε τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης από φ΄ σε $\phi'-\phi$. Συνεπάγεται ότι το A_z θα είναι κυλινδρικά συμμετρικό, δηλαδή ανεξάρτητο του φ. Ακολουθεί ότι :

$$A_z(z,\rho)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}I(z')K(z-z',\rho)dz' \tag{4.1.1}$$

όπου ορίζουμε την kernel :

$$K(z-z',\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-jkR}}{R}d\phi' \tag{4.1.2}$$

όπου $R=\sqrt{(z-z')^2+\rho^2+a^2-2\rho a\cos\phi'}$. Στην περίπτωση μιας λεπτής κεραίας, α → 0, η εξίσωση (20.1.1) συρρικνώνεται σε :

$$A_z(z,\rho)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}I(z')G(z-z',\rho)dz' \tag{4.1.3}$$

όπου $G(z-z',\rho)$ είναι η συμπτυγμένη λεπτού καλωδίου kernel :

$$G(z-z',\rho)=\frac{e^{-jkR}}{R},R=\sqrt{(z-z')^2+\rho^2} \tag{4.1.4}$$

Η εξίσωση (4.1.3) είναι η ίδια με την (1.4.3) επειδή το όριο α=0 ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι η πυκνότητα εντάσεως είναι μια γραμμική ένταση $J(\mathrm{r})=\hat{z}I(z)\delta(x)\delta(y)$, όπως δίνεται από την εξίσωση (1.4.1). Στην πράξη, η προσέγγιση λεπτού καλωδίου είναι ανεπαρκής.

Δεδομένου του διανύσματος A_z, ο συντελεστής z του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από την ένταση ρεύματος δίνεται από εξίσωση (1.4.6):

$$j\omega\mu\varepsilon E_z = \left(\partial_z^2 + k^2\right)A_z \tag{4.1.5}$$

Αν και θεωρήσαμε ως όριο το $\alpha \to 0$, αξίζει να επιμείνουμε στις περιοριστικές συνθήκες στην κυλινδρική επιφάνεια της κεραίας, όπως φαίνεται στα δεξιά του σχήματος 4.1.1. Υπολογίζοντας τις εξισώσεις (4.1.3) και (4.1.4), με $\rho=\alpha$, παίρνουμε :

$$\boxed{A_z(z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} I(z')G(z-z')dz'} \tag{4.1.6}$$

όπου αντικαταστήσαμε $A_z(z) = A_z(z,a)$ και $G(z-z') = G(z-z',a)$:

$$\boxed{G(z-z') = \frac{e^{-jkR}}{R}}\ , \qquad R = \sqrt{(z-z')^2 + a^2} \tag{4.1.7}$$

Η περιοριστική συνθήκη στην επιφάνεια είναι ότι ο παράγοντας z του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου εξαφανίζεται, δηλαδή, για $\rho=\alpha$:

$$E_{z,tot}(z,\rho) = E_z(z,\rho) + E_{z,in}(z,\rho) = 0$$

Έτσι, με $E_z(z) = E_z(z,a)$ και $E_{in}(z) = E_{z,in}(z,a)$, έχουμε $E_z = -E_{in}(z)$, και η εξίσωση (4.1.5) μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση του παράγοντα z του επικείμενου ηλεκτρικού πεδίου :

$$\boxed{\left(\partial_z^2 + k^2\right)A_z(z) = -j\omega\mu\varepsilon E_{in}(z)} \tag{4.1.8}$$

Συνοψίζοντας, δεδομένου ενός επικείμενου πεδίου $E_{in}(z)$ γνωστό κατά το μήκος της κεραίας, η εξίσωση (4.1.8) μπορεί να λυθεί για $A_z(z)$ και, στη συνέχεια η ολοκληρωτική εξίσωση (4.1.6) μπορεί να λυθεί για την ένταση $I(z)$.

Ανάλογα με το πώς διεξάγεται αυτή η διαδικασία, μπορούμε να πάρουμε είτε την εξίσωση Hallen είτε την εξίσωση Pocklington. Λύνοντας την εξίσωση (4.1.8) αντιστρέφοντας τον διαφορικό τελεστή $\left(\partial_z^2 + k^2\right)$ και συνδυάζοντας με την (4.1.6), παίρνουμε την εξίσωση ολοκληρώματος του Hallen :

$$\boxed{\frac{\mu}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} I(z')G(z-z')dz' = -j\omega\mu\varepsilon\left(\partial_z^2 + k^2\right)^{-1}E_{in}(z)} \tag{4.1.9}$$

Εναλλακτικά, εφαρμόζοντας τον διαφορικό τελεστή κατευθείαν στην εξίσωση (4.1.6), και συνδυάζοντας με την (4.1.8), έχουμε την εξίσωση ολοκληρώματος του Pocklington:

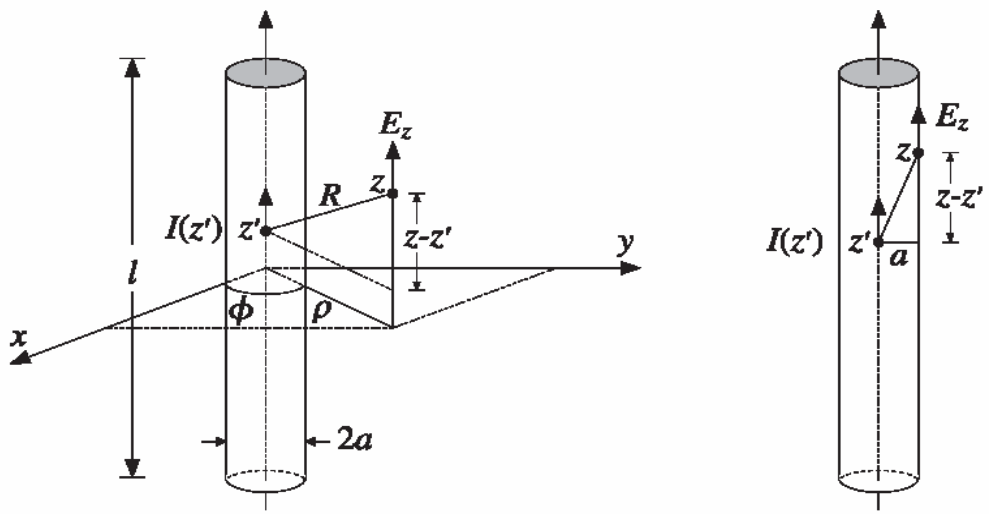
$$\boxed{\frac{\mu}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} I(z')\left(\partial_z^2 + k^2\right)G(z-z')dz' = -j\omega\mu\varepsilon E_{in}(z)} \tag{4.1.10}$$

Οι δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις πρέπει να λυθούν υπό τον περιορισμό ότι η ένταση $I(z)$ εξαφανίζεται στα άκρα της κεραίας, δηλαδή $I(l/2) = I(-l/2) = 0$.

Η εξίσωση του Hallen είναι πιο απλή αριθμητικά και συμπεριφέρεται καλύτερα κατά kernel από την εξίσωση του Pocklington. Ο ανάστροφος τελεστής στο δεξί μέρος της εξίσωσης (4.1.9) μπορεί να ξαναγραφεί σαν ένας ολοκληρωτικός τελεστής που ενεργεί στο E_{in}. Θα συζητήσουμε την περίπτωση αυτή στο κεφάλαιο 4.3.

4.2 Διάκενο δέλτα και πηγές επίπεδων κυμάτων.

Αν και η εξωτερική πηγή φορτίου $E_{in}(z)$ μπορεί αυθαίρετα να καθοριστεί, υπάρχουν δύο ειδικές περιπτώσεις πρακτικής σημασίας. Η μια είναι το γνωστό διάκενο δέλτα το οποίο προσομοιώνει τον τρόπο με τον οποίο μια κεραία που εκπέμπει, τροφοδοτείται από μια γραμμή μεταφοράς. Η άλλη είναι η περίπτωση ενός ομοιόμορφου επίπεδου κύματος υπό γωνία, σε μια κεραία δέκτη που συνδέεται σε μια αντίσταση φορτίου. Το σχήμα 4.2.1 εικονίζει τις δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 4.2.1: Εξωτερικές πηγές δρώντας επί γραμμικής κεραίας.

Η αριστερή φιγούρα δείχνει το διάκενο δέλτα μιας πηγής τάσης που εφαρμόζεται μεταξύ του άνω και κάτω μισού της κεραίας κατά πλάτος ενός μικρού διάκενου πλάτους Δz. Η εφαρμοζόμενη τάση Vo μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από ένα ηλεκτρικό πεδίο, το επικείμενο πεδίο, το οποίο υπάρχει μόνο μέσα στο διάκενο, ώστε

$$V_0 = \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} E_{in}(z)dz \qquad (4.2.1)$$

Μια απλοποιημένη τέτοια περίπτωση έχουμε όταν Δz→0. Τότε, προσεγγιστικά, $V_0 = E_{in}\Delta z$, ή $E_{in} = V_0/\Delta z$. Για να διατηρήσουμε μια συγκεκριμένη τιμή για την Vo, στο αριστερό σκέλος της εξίσωσης (4.2.1), το E_{in} πρέπει να γίνει αναλογικά μεγάλο. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτό το όριο,

$$\boxed{E_{in}(z) = V_0\delta(z)} \qquad (4.2.2)$$

Στα δεξιά του σχήματος (4.2.1) έχουμε μια κεραία δέκτη με ένα ομοιόμορφα επίπεδο κύμα, στην πολική γωνία θ, τέτοιο ώστε ο συντελεστής διάδοσης κ είναι συνεπίπεδος με τον άξονα της κεραίας.

Ο συντελεστής ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετος στο κ και έχει μια εξάρτηση χώρου $E_0 e^{-jk\cdot r}$. Για μια λεπτή κεραία, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο κατά μήκος του άξονα z, θέτοντας x=y=0 ώστε $e^{-jk\cdot r} = e^{-jk_z z} = e^{jkz\cos\theta}$, διότι $k_z = -k\cos\theta$. Έτσι, ο παράγοντας z του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι :

$$\boxed{E_{in}(z) = E_0 \sin\theta e^{jkz\cos\theta}} \qquad (20.2.3)$$

Αν το πεδίο είναι ευρύτερο *($\theta = \pi/2$),* τότε $E_{in}(z) = E_0$, που είναι μια σταθερά κατά το μήκος της κεραίας. Αν θ = 0 ή π, τότε $E_{in}(z) = 0$.

4.3 Λύνοντας την εξίσωση του Hallen.

Αντί να δουλέψουμε με το διάνυσμα δυναμικού $A_z(z)$, αποδεικνύεται ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε μια αριθμητική εκδοχή αυτής με μονάδες σε Volts που ορίζεται ως εξής :

$$V(z) = 2jcA_z(z) \qquad (20.3.1)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός. Σημειώνουμε ότι $V(z)$ δεν είναι το αριθμητικό δυναμικό $\varphi(z)$ κατά μήκος της κεραίας. Από τη συνθήκη Lorenz, εξίσωση (1.4.5), έχουμε $\partial_z A_z = -j\omega\mu\varepsilon\phi(z)$. Πολλαπλασιάζοντας με $2jc$ και σημειώνοντας ότι $c\omega\varepsilon\mu = \omega/c = k$, βρίσκουμε :

$$\partial_z V(z) = 2k\phi(z) \qquad (4.3.2)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο σκέλη της εξίσωσης (4.1.8) με $2jc$ μπορούμε να την ξαναγράψουμε με τη μορφή :

$$\boxed{\left(\partial_z^2 + k^2\right)V(z) = 2kE_{in}(z)} \qquad (4.3.3)$$

Όμοια, η εξίσωση (4.1.6) γίνεται :

$$\boxed{\int_{-h}^{h} Z(z-z')I(z')dz' = V(z)} \qquad (4.3.4)$$

όπου, για μετέπειτα ευκολία, εισάγουμε το μισό μήκος της κεραίας, $h=l/2$, και ορίζουμε την αντίσταση kernel:

$$\boxed{Z(z-z') = \frac{j\eta}{2\pi} G(z-z') = \frac{j\eta}{2\pi}\frac{e^{-jkR}}{R}} \quad , \qquad R = \sqrt{(z-z')^2 + a^2} \tag{4.3.5}$$

όπου $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$. Οι εξισώσεις (4.3.3) – (2\4.3.5) αναπαριστάνουν την αριθμητική έκδοση της εξίσωσης του Hallen. Τυπικά, μπορούμε να γράψουμε $V(z) = 2k\left(\partial_z^2 + k^2\right)^{-1} E_{in}(z)$, αλλά προτιμάμε να εκφράσουμε το *V(z)* ως έναν ολοκληρωτικό τελεστή που ενεργεί στο $E_{in}(z)$.

Μια ιδιαίτερη λύση της εξίσωσης (4.3.3) μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια της συνάρτησης Green *F(z)* για την διαφορική εξίσωση :

$$\boxed{\left(\partial_z^2 + k^2\right)F(z) = 2k\delta(z)} \tag{4.3.6}$$

Η γενική λύση της (4.3.3) προσθέτοντας την πιο γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης, $\left(\partial_z^2 + k^2\right)V(z) = 0$, στη συνάρτηση Green :

$$V(z) = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^{h} F(z-z')E_{in}(z')dz' \tag{4.3.7}$$

Με έναν επαναπροσδιορισμό των σταθερών C_1, C_2, μπορούμε να γράψουμε :

$$V(z) = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + \int_{-h}^{h} F(z-z')E_{in}(z')dz' \tag{4.3.8}$$

Πράγματι, η *F(z)* ορίζεται από μόνη της με βάση μια αυθαίρετη λύση της ομογενούς εξίσωσης. Εάν η *F(z)* ικανοποιεί την (4.3.6), το ίδιο ισχύει και για την $F_1(z) = F(z) + C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz}$, με αυθαίρετες σταθερές C_1, C_2. Μερικές πιθανές επιλογές για την *F(z)* είναι οι ακόλουθες. Διαφέρουν μεταξύ τους κατά έναν ομογενή όρο:

$$\boxed{\begin{aligned} F_1(z) &= je^{-jk|z|} = F_2(z) + j\cos kz \\ F_2(z) &= \sin k|z| = F_3(z) - \sin kz \\ F_3(z) &= 2\sin(kz)u(z) = F_4(z) + 2\sin kz \\ F_4(z) &= -2\sin(kz)u(-z) \end{aligned}} \tag{4.3.9}$$

όπου *u(z)* είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση. Όλες ικανοποιούν της (4.3.6) όπως και τις απαιτούμενες συνθήκες ασυνέχειας στην παράγωγο πρώτης τάξης, και έχουμε :

$$F'(0+) - F'(0-) = 2k \tag{4.3.10}$$

Αυτή η συνθήκη ασυνέχειας βρίσκεται ολοκληρώνοντας την εξίσωση (4.3.6) για το διάκενο $-\varepsilon \le z \le \varepsilon$ και έπειτα παίρνοντας το όριο $\varepsilon \to 0$ και υποθέτοντας ότι η ίδια η F(z) είναι συνεχής για z=0. ανάλογα με την επιλογή του F(z), η αντίστοιχη λύση V(z) μπορεί να γραφεί με τις ακόλουθες μορφές (κάθε μία με διαφορετικά C_1, C_2) :

$$
\begin{aligned}
V(z) &= C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^{h} j e^{-jl|z-z'|} E_{in}(z')dz' \\
V(z) &= C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^{h} \sin\left(k|z-z'|\right) E_{in}(z')dz' \\
V(z) &= C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + 2\int_{-h}^{z} \sin\left(k(z-z')\right) E_{in}(z')dz' \\
V(z) &= C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} - 2\int_{z}^{h} \sin\left(k(z-z')\right) E_{in}(z')dz'
\end{aligned}
\tag{4.3.11}
$$

Θα χρησιμοποιούμε συνήθως την πρώτη και τη δεύτερη μορφή για την *F(z),* με $F(z) = je^{-jk|z|}$ και $F(z) = \sin k|z|$. Συνδυάζοντας τη λύση της *V(z)* με την εξίσωση (4.3.4) παίρνουμε την ισοδύναμη μορφή της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Hallen :

$$
\boxed{\int_{-h}^{h} Z(z-z')I(z')dz' = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^{h} F(z-z')E_{in}(z')dz'}
\tag{4.3.12}
$$

ή εναλλακτικά,

$$
\int_{-h}^{h} Z(z-z')I(z')dz' = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + \int_{-h}^{h} F(z-z')E_{in}(z')dz'
$$

Οι σταθερές C_1, C_2 καθορίζονται από τις τελικές συνθήκες $I(h) = I(-h) = 0$. Στη συνέχεια, ασχολούμαστε με τις ειδικές μορφές της (4.3.12) στις περιπτώσεις του διάκενου δέλτα και του επίπεδου κύματος. Στην περίπτωση του διάκενου δέλτα, έχουμε $E_{in}(z) = V_0\delta(z)$ και το ολοκλήρωμα στο δεξί μέρος γίνεται τετριμμένο, δίνοντας :

$$
\int_{-h}^{h} F(z-z')E_{in}(z')dz' = \int_{-h}^{h} F(z-z')V_0\delta(z')dz' = V_0F(z)
$$

Έτσι έχουμε την ολοκληρωτική εξίσωση :

$$
\int_{-h}^{h} Z(z-z')I(z')dz' = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + V_0F(z)
$$

Περιμένουμε την ένταση I(z) να είναι μια άρτια συνάρτηση του z (διότι η $E_{in}(z)$ είναι) και έτσι μπορούμε να απαλείψουμε τον όρο C_2. Χρησιμοποιώντας $F(z) = \sin k|z|$ ως επιλογή για την συνάρτηση Green, παίρνουμε την εξίσωση του Hallen για την περίπτωση του διάκενου δέλτα:

$$
\boxed{\int_{-h}^{h} Z(z-z')I(z')dz' = V(z) = C_1 \cos kz + V_0 \sin k|z|}
\tag{4.3.13}
$$

Αυτή η εξίσωση διαμορφώνει τη βάση για να ορίσουμε την ένταση μιας κεντρικά καθοδηγούμενης γραμμικής κεραίας. Θα εξετάσουμε πολλές πιθανές λύσεις της, όπως και αριθμητικές λύσεις που βασίζονται σε στιγμιαίες μεθόδους.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η *V(z)* δίνει τη διαφορά δυναμικού μεταξύ του άνω και κάτω μισού της κεραίας. Διαφορίζοντας την *V(z)* στο *z*=0 και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.3.2), έχουμε :

$$V'(0+)-V'(0-)=2kV_0=2k(\phi(0+)-\phi(0-)) \quad \Rightarrow \quad \phi(0+)-\phi(0-)=V_0$$

Σαν δεύτερο παράδειγμα, εξετάζουμε την περίπτωση της κεραίας που λαμβάνει ένα ομοιόμορφο επίπεδο κύμα με επικείμενο πεδίο όπως στην εξίσωση (4.2.3). Χρησιμοποιώντας $F(z)=je^{-jk|z|}$ ως συνάρτηση Green, τα ολοκληρώματα *F(z)* και $E_{in}(z)$, μπορούν εύκολα να δώσουν :

$$\int_{-h}^{h} je^{-jk|z-z'|}E_0\sin\theta e^{jkz'\cos\theta}dz'=\frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkz\cos\theta}+\text{(ομοιογενείς όροι)}$$

όπου οι τελευταίοι όροι είναι λύσεις της ομοιογενούς εξίσωσης, και έτσι, μπορούν να απορροφηθούν από τους άλλους ομοιογενείς όρους του V(z). Επειδή η ένταση δεν θα είναι συμμετρική στο z, πρέπει να κρατήσουμε και τους δύο ομοιογενείς όρους, έχοντας ως αποτέλεσμα την εξίσωση του Hallen για μια κεραία δέκτη :

$$\boxed{\int_{-h}^{h}Z(z-z')I(z')dz'=V(z)=C_1e^{jkz}+C_2e^{-jkz}+\frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkz\cos\theta}} \qquad (4.3.14)$$

4.4 Ημιτονοειδής Προσέγγιση της έντασης.

Εδώ θα εξετάσουμε κάποιες απλοποιημένες λύσεις της εξίσωσης (4.3.13), οι οποίες επαληθεύουν την ημιτονοειδή προσέγγιση της έντασης του ρεύματος.

Ερευνώντας τον kernel $Z(z-z')$ ή $G(z-z')=e^{-jkR}/R$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης (20.3.13), σημειώνουμε ότι καθώς η ολοκληρωτική μεταβλητή z' σαρώνει τον z, ο παρονομαστής γίνεται πολύ μεγάλος, διότι $R=a$ για $z'=z$. Έτσι, το ολοκλήρωμα διαιρείται με την τιμή του ολοκληρώματος κοντά στο $z'=z$. Προσεγγιστικά μπορούμε να γράψουμε :

$$\int_{-h}^{h}Z(z-z')I(z')dz'\cong\overline{Z}(z)I(z)\cong\overline{Z}I(z) \qquad (4.4.1)$$

όπου $\overline{Z}(z)$ είναι ένα είδος μέσης τιμής του $Z(z-z')$ στην γειτονιά του $z'=z$. Αυτή η ποσότητα μεταβάλλεται με το z και μπορούμε να την προσεγγίσουμε με μια σταθερά, ας πούμε $\overline{Z}$. Τότε η εξίσωση του Hallen γίνεται προσεγγιστικά :

$$\overline{Z}I(z)=V(z)=C_1\cos kz+V_0\sin k|z|$$

Αυτό δείχνει ότι η *I(z)* είναι προσεγγιστικά ημιτονοειδής. Η σταθερά C_1 καθορίζεται από την τελική συνθήκη $I(h)=0$ η οποία δίνει :

$$C_1\cos kh+V_0\sin kh=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=-V_0\frac{\sin kh}{\cos kh}$$

έτσι ώστε η *I(z)* γίνεται :

$$\overline{Z}I(z) = -V_0 \frac{1}{\cos kh}\left[\sin kh\cos kz - \cos kh\sin k|z|\right] = -V_0 \frac{1}{\cos kh}\sin\left(k\left(h-|z|\right)\right)$$

Λύνοντας ως προς *I(z),* παίρνουμε την κοινή έκφραση στάσιμου κύματος για την ένταση :

$$I(z) = I(0)\frac{\sin\left(k\left(h-|z|\right)\right)}{\sin kh}, \qquad I(0) = -\frac{V_0 \sin kh}{\overline{Z}\cos kh} \tag{4.4.2}$$

όπου *I(0)* είναι η ένταση εισόδου στο *z*=0. Η ωμή προσέγγιση της εξίσωσης (4.4.1) μπορεί να επεξεργαστεί περαιτέρω χρησιμοποιώντας την προσέγγιση τριών όρων του King, που θα συζητηθεί στο κεφάλαιο 4.6. Από την εξίσωση (4.4.2) φαίνεται ότι η αντίσταση εισόδου της κεραίας είναι :

$$Z_A = \frac{V_0}{I(0)} = -\overline{Z}\cot kh \tag{4.4.3}$$

4.5 Ανακλαστικές και κεντροτροφοδοτούμενες κεραίες δέκτες.

Μια όμοια προσέγγιση με την εξίσωση του Hallen μπορούμε να κάνουμε και για την περίπτωση του επίπεδου κύματος, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.2.1. Ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις: (α) $Z_L = 0$, που αντιστοιχεί σε μια ανακλαστική παρασιτική κεραία με βραχυκυκλωμένα τερματικά εξόδου, (β) $Z_L = \infty$, που αντιστοιχεί σε ανοιχτά τερματικά και (γ) αυθαίρετο Z_L, που αντιστοιχεί σε μια κεντροτροφοδοτούμενη κεραία δέκτη.

Βρίσκοντας την ένταση του βραχυκυκλώματος της περίπτωσης (α) και την τάση του ανοιχτού κυκλώματος της περίπτωσης (β), θα καθορίσουμε την σύνθετη αντίσταση εξόδου της κεραίας δέκτη, η οποία είναι η σύνθετη αντίσταση Thevenin Z_A του μοντέλου του κεφαλαίου 2.4 και δείχνει ότι είναι ίση με την αντίσταση εισόδου (4.4.3) της κεραίας πομπού, σε συμφωνία με την αρχή της αμοιβαιότητας. Επίσης, θα δείξουμε από την περίπτωση (γ), ότι το πρότυπο γωνιακού κέρδους της κεραίας δέκτη, συμφωνεί με αυτό του πομπού.

Ξεκινώντας με την περίπτωση του βραχυκυκλώματος, η προσέγγιση της εξίσωσης (4.4.1) εφαρμόζεται στην εξίσωση (4.3.14) και δίνει :

$$\overline{Z}I(z) = V(z) = C_1 e^{jkz} + \frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkz\cos\theta}$$

Οι συνθήκες τελικού σημείου $I(h) = I(-h) = 0$ παρέχουν δύο εξισώσεις για τους δύο αγνώστους C_1, C_2, που είναι :

$$C_1 e^{jkh} + C_2 e^{-jkh} + \frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkh\cos\theta} = 0$$
$$C_1 e^{-jkh} + C_2 e^{jkh} + \frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{-jkh\cos\theta} = 0$$

με λύση :

$$C_1 = -\frac{E_0\sin\left(kh\left(1+\cos\theta\right)\right)}{k\sin\theta\sin kh\cos kh}, \qquad C_2 = -\frac{E_0\sin\left(kh\left(1-\cos\theta\right)\right)}{k\sin\theta\sin kh\cos kh}$$

Τότε, η ένταση *I(z)* γίνεται :

$$I(z)\frac{1}{\overline{Z}}\left[C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \frac{2E_0}{k\sin\theta} e^{jkz\cos\theta}\right] \tag{4.5.1}$$

Για κανονική πρόσπτωση, θ = 90°, έχουμε C_1=C_2 και η εξίσωση (4.5.1) γίνεται:

$$I(z) = \frac{2E_0}{\overline{Z}k\cos kh}(\cos kh - \cos kz) \tag{4.5.2}$$

Για θ=0 και θ=π, ο παράγοντας z του επικείμενου πεδίου είναι μηδέν, $E_{in}(z) = 0$, και περιμένουμε *I(z)=0*. Αυτό μπορεί να επαληθευτεί παίρνοντας προσεκτικά το όριο της εξίσωσης (4.5.1) στο *θ=0,π*, με τον φαινομενικά αποκλίνοντα όρο $2E_0/k\sin\theta$ να απαλείφεται.

Η ένταση του βραχυκυκλώματος στους ακροδέκτες εξόδου υπολογίζεται θέτοντας *z*=0 στην εξίσωση (4.5.1) :

$$I_{SC} = I(0) = \frac{1}{\overline{Z}}\left[C_1 + C_2 + \frac{2E_0}{k\sin\theta}\right]$$

Εισάγοντας τις εκφράσεις για τα C_1, C_2, βρίσκουμε :

$$I_{SC} = \frac{2E_0}{\overline{Z}k\cos kh}(\cos kh - \cos kz) \tag{4.5.3}$$

Για την περίπτωση ανοιχτού κυκλώματος, το επικείμενο πεδίο θα παράγει μια τάση ανοιχτού κυκλώματος κατά πλάτος του διάκενου, και τότε, το αριθμητικό δυναμικό *φ(z)* θα είναι ασυνεχές στο *z*=0. Επιπρόσθετα, πρέπει να εφαρμόσουμε την εξίσωση (4.3.14) ξεχωριστά για το άνω και κάτω μισό της κεραίας. Χρησιμοποιώντας $\cos kz$ και $\sin kz$ ως τους ομοιογενείς όρους, αντί για $e^{\pm jkz}$, έχουμε την προσέγγιση :

$$\overline{Z}I(z) = V(z) = \begin{cases} C_1\cos kz + C_2\sin kz + \dfrac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkz\cos\theta}, z \geq 0 \\ D_1\cos kz + D_2\sin kz + \dfrac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkz\cos\theta}, z \leq 0 \end{cases}$$

Οι συνθήκες $I(0+) = I(h)0$ και $I(0-) = I(-h) = 0$ μας παρέχουν τέσσερις εξισώσεις για τους τέσσερις αγνώστους C_1, C_2, D_1, D_2. Αυτές είναι :

$$C_1 + \frac{2E_0}{k\sin\theta} = 0, \qquad C_1\cos kh + C_2\sin kh + \frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkh\cos\theta} = 0$$
$$D_1 + \frac{2E_0}{k\sin\theta} = 0, \qquad D_1\cos kh - D_2\sin kh + \frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{-jkh\cos\theta} = 0$$

με λύση:

$$C_1 = D_1 = -\frac{2E_0}{k\sin\theta}$$

$$C_2 = \frac{2E_0\left(\cos kh - e^{jkh\cos\theta}\right)}{k\sin\theta\sin kh}, \qquad D_2 = -\frac{2E_0\left(\cos kh - e^{-jkh\cos\theta}\right)}{k\sin\theta\sin kh}$$

Η τάση ανοιχτού κυκλώματος είναι $V_{OC} = \phi(0+) - \phi(0-)$. Χρησιμοποιώντας την (4.3.2) έχουμε :

$$V'(0+) - V'(0-) = 2kV_{OC} = k(C_2 - D_2) \quad \Rightarrow \quad V_{OC} = \frac{1}{2}(C_2 - D_2)$$

και χρησιμοποιώντας τις λύσεις για C_2 και D_2 έχουμε :

$$V_{OC} = \frac{2E_0}{k\sin kh}\frac{\cos kh - \cos(kh\cos\theta)}{\sin\theta} \tag{4.5.4}$$

Έχοντας βρει την ένταση ρεύματος βραχυκυκλώματος και την τάση ανοιχτού κυκλώματος, υπολογίζουμε την αντίστοιχη σύνθετη αντίσταση εξόδου Thevenin, διαιρώντας την (4.5.4) με την (4.5.3) :

$$Z_A = -\frac{V_{OC}}{I_{SC}} = -\overline{Z}\cot kh \tag{4.5.5}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την αντίθετη φορά του ρεύματος I_{sc} (προς το άνω μισό της κεραίας). Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (4.5.5) συμφωνεί με την (4.4.3) για την περίπτωση εκπομπής.

Οι εξισώσεις (4.5.3) και (4.5.4) είναι ειδικές περιπτώσεις ενός πιο γενικού συμπεράσματος, που οφείλονται στην αρχή της αμοιβαιότητας. Επιδρώντας ένα επικείμενο πεδίο σε μια γραμμική κεραία δέκτη, η παραγόμενη ένταση βραχυκυκλώματος και τάση ανοιχτού κυκλώματος στους ακροδέκτες της, δίνονται από:

$$\boxed{I_{SC} = \frac{1}{V_0}\int_{-h}^{h} E_{in}(z)I(z)dz, V_{OC} = -\frac{1}{I_0}\int_{-h}^{h} E_{in}(z)I(z)dz} \tag{4.5.6}$$

όπου $I(z)$ είναι η ένταση που παράγεται από τη Vo όταν η κεραία εκπέμπει. Εισάγοντας την εξίσωση (4.4.2) στην (4.5.6) μπορούμε εύκολα να αποκομίσουμε τις εξισώσεις (4.5.3) και (4.5.4).

Τελικά, εξετάζουμε την περίπτωση (γ), μιας αυθαίρετης αντίστασης φορτίου Z_L. Η ένταση θα είναι συνεχής κατά πλάτος του διάκενου αλλά δεν θα εξαφανιστεί στο z=0. Η διαφορά δυναμικού κατά πλάτος του διάκενου θα είναι ίση με τη μείωση της τάσης κατά πλάτος του φορτίου, δηλαδή $V_L = -Z_L I(0)$. Η προσεγγιστική εξίσωση Hallen θα είναι :

$$\overline{Z}I(z) = V(z) = \begin{cases} C_1\cos kz + C_2\sin kz + \dfrac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkz\cos\theta}, z \ge 0 \\ D_1\cos kz + D_2\sin kz + \dfrac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkz\cos\theta}, z \le 0 \end{cases}$$

όπου $D_1=C_1$ εξαιτίας της συνέχειας του I(z) στο z=0. Οι τελικές συνθήκες, $I(h)=I(-h)=0$, δίνουν :

$$C_1\cos kh + C_2\sin kh + \frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{jkh\cos\theta} = 0$$
$$C_1\cos kh - D_2\sin kh + \frac{2E_0}{k\sin\theta}e^{-jkh\cos\theta} = 0$$

Επιπλέον, έχουμε τη συνθήκη ασυνέχειας :

$$V'(0+)-V'(0-)=2kV_L=k(C_2-D_2) \quad \Rightarrow \quad V_L=\frac{1}{2}(C_2-D_2)$$

Ο νόμος του Ohm για το φορτίο δίνει :

$$V_L=-Z_LI(0)=-\frac{Z_L}{\overline{Z}}\left(C_1+\frac{2E_0}{k\sin\theta}\right)=\frac{Z_L}{Z_A}\left(C_1+\frac{2E_0}{k\sin\theta}\right)\cot kh$$

όπου, χρησιμοποιήσαμε την (4.5.5) λύνοντας τις παραπάνω τέσσερις εξισώσεις ως προς C_1, C_2, D_2, V_L, βρίσκουμε τελικά :

$$V_L=\frac{Z_L}{Z_A+Z_L}\frac{2E_0}{k\sin kh}\frac{\cos kh-\cos(kh\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{V_{OC}Z_L}{Z_A+Z_L} \qquad (4.5.7)$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το μοντέλο Thevenin που χρησιμοποιήσαμε στο κεφάλαιο 2.4. Η ισχύς που φθάνει στο φορτίο θα είναι ανάλογη του $|V_L|^2$, η οποία είναι ανάλογη του κέρδους ενός δίπολου που εκπέμπει :

$$\left|\frac{\cos kh-\cos(kh\cos\theta)}{\sin\theta}\right|^2$$

4.6 Προσέγγιση τριών όρων του King.

Για να βελτιώσουμε την ωμή ημιτονοειδή προσέγγιση της εξίσωσης (4.4.1), πρέπει να κοιτάξουμε πιο προσεκτικά τις ιδιότητες της σύνθετης αντίστασης kernel. Χωρίζοντας τα πραγματικά από τα μιγαδικά μέρη, έχουμε :

$$Z(z-z')=\frac{j\eta}{2\pi}\frac{e^{-jkR}}{R}=\frac{k\eta}{2\pi}\left[\frac{\sin kR}{kR}+j\frac{\cos kR}{kR}\right]$$

Για R κοντά στο μηδέν, το μιγαδικό μέρος γίνεται πολύ μεγάλο και μπορούμε να του εφαρμόσουμε την προσέγγιση (4.4.1). Αλλά, το πραγματικό μέρος παραμένει συγκεκριμένο για R=0. Για $kR\le\pi$, το οποίο θα ήταν αληθές εάν $kh\le\pi$, η συνάρτηση sinc μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά από $\cos(kR/2)\cong\cos(k|z-z'|/2)$ αφού μπορεί να επαληθευτεί από τα σχεδιαγράμματα των δύο συναρτήσεων. Τότε,

$$\frac{\sin kR}{kR} \cong \cos\left(\frac{kR}{2}\right) \cong \cos\left(\frac{k(z-z')}{2}\right), \quad \text{για} \quad kR \le \pi$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση για το πραγματικό μέρος του kernel, και εφαρμόζοντας την προσέγγιση της εξίσωσης (4.4.1) στο φανταστικό, ο King απέδειξε ότι ισχύει μια βελτιωμένη προσέγγιση για το ολοκλήρωμα :

$$\int_{-h}^{h} Z(z-z')I(z')dz' \cong R\cos\left(\frac{kz}{2}\right) + jXI(z)$$

όπου R,X είναι κατάλληλες σταθερές, οι οποίες είναι πραγματικές αν και το *I(z)* είναι πραγματικό. Αυτή η προσέγγιση, επίσης, υποθέτει ότι η ένταση είναι συμμετρική, $I(z) = I(-z)$. Έτσι, η εξίσωση του Hallen (4.3.13) μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής :

$$R\cos\left(\frac{kz}{2}\right) + jXI(z) = V(z) = C_1 \cos kz + V_0 \sin k|z|$$

Αυτή δείχνει ότι η ένταση *I(z)* είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των ημιτονοειδών όρων $\sin k|z|, \cos kz, \cos(kz/2)$. Αυτό οδηγεί στην προσέγγιση τριών όρων του King για την ένταση , η οποία συνάγει στην συνθήκη $I(h) = 0$. Έτσι, υπάρχουν δύο εναλλακτικές μορφές:

$$I(z) = A_1 I_1(z) + A_2 I_2(z) + A_3 I_3(z) = A_1' I_1'(z) + A_2' I_2'(z) + A_3' I_3'(z) \qquad (4.6.1)$$

όπου οι συνιστώσες εντάσεις ορίζονται από:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1(z) &= \sin k|z| - \sin kh \\ I_2(z) &= \cos kz - \cos kh \\ I_3(z) &= \cos(kz/2) - \cos(kh/2) \end{aligned}} \quad , \quad \boxed{\begin{aligned} I_1'(z) &= \sin(k(h-|z|)) \\ I_2'(z) &= \cos kz - \cos kh \\ I_3'(z) &= \cos(kz/2) - \cos(kh/2) \end{aligned}} \qquad (4.6.2)$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $I_1(z) = I_2'(z)\tan kh - I_1'(z)/\cos kh$, η σχέση μεταξύ των πρωτευόντων και δευτερευόντων συντελεστών είναι :

$$A_1' = -\frac{A_1}{\cos kh}, A_2' = A_1 + A_2 \tan kh, A_3' = A_3 \qquad (4.6.3)$$

Ο μετασχηματισμός μεταξύ των πρωτευόντων και δευτερευόντων ρευμάτων διαλύεται όταν $\cos kh = 0$, δηλαδή όταν $I = 2h$ είναι ένα περιττό πολλαπλάσιο του λ/2. Στην περίπτωση αυτή μόνο η δευτερεύουσα μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Αλλιώς, η πρωτεύουσα μορφή προτιμάται διότι ο όρος $I_1'(z) = \sin(k(h-|z|))$ έχει τη συμβατική μορφή στάσιμου κύματος. Θα εργαστούμε με τη δευτερεύουσα μορφή επειδή είναι πάντα πιθανό να την συναντήσουμε.

Για να καθορίσουμε τους συνιστώντες συντελεστές A_1, A_2, A_3, εισάγουμε την (4.6.1) στην εξίσωση του Hallen (4.3.13) και παίρνουμε :

$$A_1V_1(z)+A_2V_2(z)+A_3V_3(z)=V(z)=C_1\cos kz+V_0\sin k|z| \tag{4.6.4}$$

όπου,

$$V_i(z)=\int_{-h}^{h}Z(z-z')I_i(z')dz', \qquad i=1,2,3 \tag{4.6.5}$$

Στο $z=h$, έχουμε :

$$A_1V_1(h)+A_2V_2(h)+A_3V_3(h)=V(h)=C_1\cos kh+V_0\sin kh \tag{4.6.6}$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (4.6.4) και (4.6.6), ορίζοντας $V_{di}(z)=V_i(z)-V_i(h)$, έχουμε :

$$A_1V_{d1}(z)+A_2V_{d2}(z)+A_3V_{d3}(z)=C_1(\cos kz-\cos kh)+V_0(\sin k|z|-\sin kh)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (4.6.2) μπορούμε να γράψουμε :

$$A_1V_{d1}(z)+A_2V_{d2}(z)+A_3V_{d3}(z)=C_1I_2(z)+V_0I_1(z) \tag{4.6.7}$$

Εισάγοντας τη διαφορά kernel $Z_d(z-z')=Z(z-z')-Z(h-z')$, έχουμε :

$$V_{di}(z)=\int_{-h}^{h}Z_d(z-z')I_i(z')dz', \qquad i=1,2,3 \tag{4.6.8}$$

Η βελτιωμένη προσέγγιση που εφαρμόζεται στην διαφορά kernel δίνει:

$$\int_{-h}^{h}Z_d(z-z')I(z')dz'=R(\cos(kz/2)-\cos(kh/2))+jXI(z)=RI_3(z)+jXI(z)$$

Τότε, εφαρμόζοντάς την στις τρεις διαφορετικές εντάσεις $I_1(z),I_2(z),I_3(z)$, έχουμε :

$$V_{di}(z)=V_i(z)-V_i(h)=R_iI_3(z)+jX_iI_i(z), \qquad i=1,2,3 \tag{4.6.9}$$

Εισάγοντας αυτές τις προσεγγίσεις στην (4.6.4) έχουμε :

$$A_1[R_1I_3(z)+jX_1I_1(z)]+A_2[R_2I_3(z)+jX_2I_2(z)]+A_3[R_3I_3(z)+jX_3I_3(z)]=C_1I_2(z)+V_0I_1(z)$$

Ορίζοντας $Z_3=R_3+jX_3$ και ταιριάζοντας τους συντελεστές $I_1(z),I_2(z),I_3(z)$ στα δύο μέρη, παίρνουμε τρεις εξισώσεις για τους τέσσερις αγνώστους A_1, A_2, A_3, C_1 :

$$jX_1A_1=V_0,\ jX_2A_2-C_1=0,\ R_1A_1+R_2A_2+Z_3A_3=0$$

Η τέταρτη εξίσωση είναι η (20.6.6). Έτσι, παίρνουμε το γραμμικό σύστημα :

$$\begin{bmatrix} jX_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & jX_2 & 0 & -1 \\ R_1 & R_2 & Z_3 & 0 \\ V_1(h) & V_2(h) & V_3(h) & -\cos kh \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ C_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \\ V_0\sin kh \end{bmatrix} \tag{4.6.10}$$

Τα στοιχεία του πίνακα μπορούν να προσδιοριστούν υπολογίζοντας τις προσεγγίσεις (4.6.9) σε σημεία του z στα οποία οι εντάσεις $I_i(z)$ εμφανίζουν τις μέγιστες τιμές τους. Για $I_1(z)$,

το μέγιστο προκύπτει στο $z_1 = 0$ αν $h \le \lambda/4$ και στο $z_1 = h - \lambda/4$ αν $\lambda/4 \le h \le 5\lambda/8$. Για $I_2(z)$ και $I_3(z)$, τα μέγιστα προκύπτουν στο z=0. Έτσι, οι εξισώσεις ορισμού για τα στοιχεία του πίνακα είναι :

$$\boxed{\begin{aligned} V_{d1}(z_1) &= V_1(z_1) - V_1(h) = R_1 I_3(z_1) + jX_1 I_1(z_1) \\ V_{d2}(0) &= V_2(0) - V_2(h) = R_2 I_3(0) + jX_2 I_2(0) \\ V_{d3}(0) &= V_3(0) - V_3(h) = Z_3 I_3(0) \end{aligned}} \qquad (4.6.11)$$

Οι συντελεστές R_1, X_1, R_2, X_2 υπολογίζονται εξάγοντας το πραγματικό και το μιγαδικό μέρος αυτών των εκφράσεων. Τα αριστερά μέρη μπορούν να υπολογιστούν με απευθείας αριθμητική ολοκλήρωση των ορισμών (4.6.5). Το αναμενόμενο εύρος εφαρμογής της συνθήκης τριών όρων είναι για μήκη κεραιών $l \le 1.25\lambda$. Εντούτοις, λειτουργεί καλά και για μεγαλύτερα μήκη.

Η συνάρτηση MATLAB king, ενεργοποιεί τις γραφικές εξισώσεις (4.6.10) και (4.6.11). Χρησιμοποιείται :

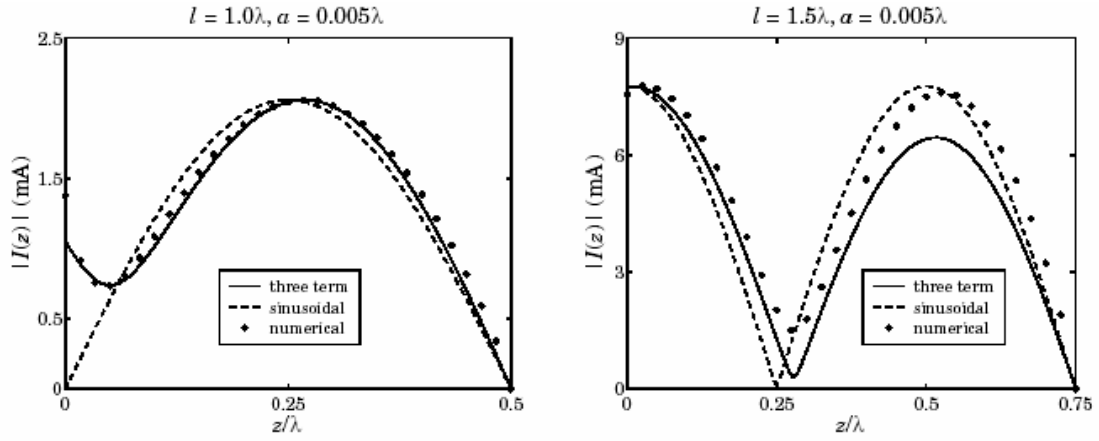
A = king(L,a);

όπου L, α είναι τα μήκη της κεραίας και η ακτίνα της σε μονάδες του λ και η έξοδος A είναι το διάνυσμα στήλη των συντελεστών A_i. Αν το μήκος είναι περιττό πολλαπλάσιο του *λ/2*, τότε $A = [A_1, A_2, A_3]^T$, ή $A = \left[A_1', A_2', A_3'\right]^T$.

Η αριθμητική ολοκλήρωση γίνεται με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης τετραγώνου 32 πόντων των Gauss – Legendre, σε συνδυασμό με την συνάρτηση quadr, η οποία παρέχει τις κατάλληλες βάσεις και σημεία αναφοράς για την ολοκλήρωση.

Παράδειγμα 4.6.1 :

Το σχήμα 4.6.1 συγκρίνει την προσέγγιση τριών όρων με την γνωστή ημιτονοειδή προσέγγιση, $I(z) = \sin(k(h - |z|))$, και με την ακριβή αριθμητική λύση της εξίσωσης του Hallen για τις δύο περιπτώσεις $l = \lambda$ και $l = 1.5\lambda$. Η ακτίνα της κεραίας ήταν α = 0.005λ.



Σχήμα 4.6.1: Τριών όρων προσέγγιση για $l = \lambda$ και $l = 1.5\lambda$.

Για την περίπτωση του συνολικού μήκους κύματος, η ημιτονοειδής προσέγγιση έχει $I(0)=0$, που προϋποθέτει απεριόριστη αντίσταση κεραίας. Η προσέγγιση τριών όρων δίνει μια μη μηδενική τιμή για το $I(0)$. Οι υπολογισμένοι συντελεστές τριών όρων δίνουν για τις δύο περιπτώσεις :

$$\begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \end{bmatrix} = 10^{-3}\begin{bmatrix} -3.0409\,j \\ 0.3573+0.3686\,j \\ 0.3044+0.3369\,j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 10^{-3}\begin{bmatrix} -2.4348\,j \\ 7.8154-3.6654\,j \\ 0.9416+2.8503\,j \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιήσαμε την πρωτεύουσα αναπαράσταση της εξίσωσης (4.6.1) για την περίπτωση του συνολικού μήκους κύματος, και την δευτερεύουσα για $l=1.5\lambda$. Τα γραφήματα παράχθηκαν από τον ακόλουθο κώδικα :

```
L=1.0;
a=0.008;
h=L/2;
k=2*pi;

A=king(L,a);
z=0 : h/100 : h;
Ik=kingeval(L,A,z);
Is=sin(k*(h-abs(z)));

M=30;
[In,zn,cnd]=hallen(L,a,M);
In=In(M+1:end);
zn=zn(M+1:end);

mk=max(abs(Ik));
ms=max(abs(Is));
mn=max(abs(In));

plot(z, abs(Ik)*mn/mk, z, abs(Is)*mn/ms, '- -', zn, abs(In), '.');
```

Η συνάρτηση kingeval απλώς υπολογίζει την προσέγγιση τριών όρων (4.6.1) για έναν δοσμένο αριθμό σημείων z.

4.7 Αριθμητική λύση της εξίσωσης του Hallen.

Στα τελευταία τρία κεφάλαια, συζητήσαμε προσεγγιστικές λύσεις για την εξίσωση του Hallen που πήραμε απλοποιώντας το ολοκλήρωμα.

Εδώ θα συζητήσουμε αριθμητικές λύσεις για την συνολική ολοκληρωτική εξίσωση που βασίζονται σε μεθόδους στιγμών. Θεωρούμε την περίπτωση του διάκενου δέλτα και την πιο γενική περίπτωση ενός τυχαίου επικείμενου πεδίου. Οι σχετικές εξισώσεις Hallen είναι οι (4.3.12) και (4.3.13), δηλαδή,

$$\int_{-h}^{h} Z(z-z')I(z')dz' = V(z) = C_1 \cos kz + V_0 \sin k|z| \tag{4.7.1}$$

$$\int_{-h}^{h} Z(z-z')I(z')dz' = V(z) = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^{h} F(z-z')E_{in}(z')dz' \tag{4.7.2}$$

Μια αριθμητική λύση προσπαθεί να διακρίνει αυτές τις εξισώσεις και να τις μετατρέψει σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Ίσως, το πιο απλό σχέδιο είναι να αντικαταστήσουμε την ένταση $I(z)$ με τη μορφή δειγμάτων, τύπου $N = 2M + 1$ για ισοκατανεμημένα σημεία z κατά μήκους της κεραίας, δηλαδή :

$$\boxed{I(z') = \sum_{m=-M}^{M} I(z_m)d(z' - z_m)\Delta z} \tag{4.7.3}$$

όπου, $-M \le m \le M$:

$$\boxed{z_m = m\Delta z, \Delta z = \frac{h}{M} = \frac{l}{N-1}} \tag{4.7.4}$$

Ένα τέτοιο σχέδιο διάκρισης φαίνεται στο κάτω μέρος του σχήματος 4.7.1, και ονομάζεται «τύπου – 0», για N=11 και M=5. Το κενό διάστημα Δz εμφανίζεται σαν ένας παράγοντας στην εξίσωση (4.7.3) τέτοιος ώστε να δίνει τις σωστές διαστάσεις στο $I(z)$. Σημειώνουμε ότι το τελευταίο δείγμα συμπίπτει με το τελικό σημείο της κεραίας, $z_M = M\Delta z = h$. Το μήκος της κεραίας χωρίζεται σε N-1 τμήματα μήκους Δz και δύο μισά τμήματα μήκους Δz/2 στα δύο άκρα.

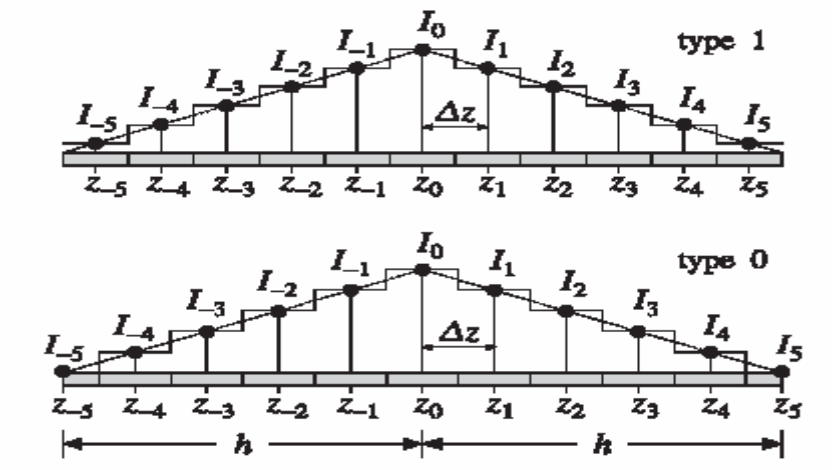
Η ακριβής συνάρτηση δέλτα $\delta(z - z_m)\Delta z$ μπορεί να αντικατασταθεί από έναν συγκεκριμένο παλμό πλάτους Δz επικεντρωμένο γύρω από το σημείο z_m, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.7.1). Θα εξετάσουμε αυτή την περίπτωση αργότερα. Εισάγοντας την (4.7.3) στην (4.7.1), το ολοκλήρωμα γίνεται κοινότυπο, δίνοντας :

$$\sum_{m=-M}^{M} Z(z - z_m)I(z_m)\Delta z = V(z) = C_1 \cos kz + V_0 \sin k|z|$$

Αν υπολογίσουμε αυτή την εξίσωση στα ίδια δείγματα σημείων $z_n = n\Delta z$, θα πάρουμε ένα σύστημα NxN γραμμικών εξισώσεων για τους αγνώστους $I(z_m)$, που είναι :

$$\sum_{m=-M}^{M} Z(z_n - z_m)I(z_m)\Delta z = V(z_n) = C_1 \cos kz_n + V_0 \sin k|z_n| \tag{4.7.5}$$

για $-M \le n \le M$. Η σταθερά C_1 θα επιλεχθεί έτσι ώστε να ικανοποιεί την τελική συνθήκη $I(z_M) = I(h) = 0$. Η εξίσωση (4.7.5) μπορεί να γραφεί και και με την συμπτυγμένη μορφή πίνακα:



Σχήμα 4.7.1: Δειγματικά γραμμικά περιγράμματα κατά μήκος κεραίας, με N=11, M=5.

$$ZI = v = C_1 c + V_0 s \tag{4.7.6}$$

όπου Z είναι ο πίνακας NxN $Z_{nm} = Z(z_n - z_m)\Delta z$ και I, s, c είναι οι στήλες με στοιχεία $I_n = I(z_n), c_n = \cos kz_n, s_n$ και $s_n = \sin k|z_n|$, και $f\ (\mathbf{r}', t)$ για $n = -M, ..., M$. Όλοι αυτοί οι παράγοντες είναι συμμετρικοί ως προς το κέντρο τους, δηλαδή $I(z_{-n}) = I(z_n)$, και όμοια για τους άλλους. Έτσι, έχουμε :

$$I = \begin{bmatrix} I_M \\ \mathrm{M} \\ I_1 \\ I_0 \\ I_1 \\ \mathrm{M} \\ I_M \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_M \\ \mathrm{M} \\ v_1 \\ v_0 \\ v_1 \\ \mathrm{M} \\ v_M \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_M \\ \mathrm{M} \\ c_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ \mathrm{M} \\ c_M \end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix} s_M \\ \mathrm{M} \\ s_1 \\ s_0 \\ s_1 \\ \mathrm{M} \\ s_M \end{bmatrix} \tag{4.7.7}$$

Ο πίνακας Z είναι ένας συμμετρικός πίνακας Toeplitz διότι ο ω=k=0 πίνακας στοιχείο εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $|n-m|$, και :

$$Z_{nm} = Z(z_n - z_m)\Delta z = \Delta z \frac{j\eta}{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R}, \qquad R = \sqrt{a^2 + \Delta z^2 (n-m)^2} \tag{4.7.8}$$

Εκμεταλλευόμενοι τη φύση Toeplitz του Z και την συμμετρία των παραγόντων (4.7.7), το σύστημα πινάκων (4.7.6) μπορεί να αντικατασταθεί από ένα ουσιαστικά μισό σε μέγεθος, με αποτέλεσμα να επιταχύνεται η λύση. Για να το δούμε αυτό, χωρίζουμε τον παράγοντα I στο άνω (αρνητικά z), στο μέσο, και στο κάτω (θετικά z) μέρος του :

$$I=\begin{bmatrix} I_1^R \\ I_0 \\ I_1 \end{bmatrix}, I_1=\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \text{M} \\ I_M \end{bmatrix}, I_1^R=\begin{bmatrix} I_M \\ \text{M} \\ I_2 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

Το άνω τμήμα I_1^R είναι το αντίστροφο του κάτω τμήματος I_1. Η αντίστροφη λειτουργία μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή πίνακα :

$$I_1^R = JI_1, \qquad J=\begin{bmatrix} 0 & \Lambda & 0 & 1 \\ 0 & \Lambda & 1 & 0 \\ \text{M} & \text{N} & \text{M} & \text{M} \\ 1 & \Lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου J είναι ο MxM αντίστροφος πίνακας J, δηλαδή ο πίνακας με άσσους κατά μήκος της αντιδιαγωνίου. Τότε, ο πίνακας Z και η εξίσωση (4.7.6) μπορούν να διαμελιστούν με έναν συμβατικό τρόπο όπως :

$$\begin{bmatrix} A^R & a_1^R & B^R \\ a_2^{TR} & a_0 & a_2^T \\ B & a_1 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1^R \\ I_0 \\ I_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1^R \\ v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} \tag{4.7.9}$$

όπου έχουμε απαλείψει την μεσαία στήλη και γραμμή του Z. Επειδή ο Z ικανοποιεί την σταθερή συνθήκη αντιστροφής $Z(n,m)=Z(-n.-m)$, το πάνω αριστερό τμήμα A^R θα είναι το αντίστροφο του κάτω δεξιού τμήματος A, και το πάνω δεξιό αυτό του κάτω αριστερού. Επιπλέον, επειδή ο Z είναι συμμετρικός, έχουμε $a_2=a_1$, και επίσης, για τους υποπίνακες Toeplitz, $A^R=A^T=A$ και $B^R=B^T$.

Ο αντίστροφος ενός πίνακα παράγεται αντιστρέφοντας τις στήλες και τις γραμμές, πράγμα πού είναι ισοδύναμο με τον πολλαπλασιασμό με τον πίνακα αντιστροφής J από δεξιά και αριστερά:

$$A^R = JAJ$$

Αναγράφοντας τις τρεις εξισώσεις ανά τμήμα του συστήματος (4.7.9), παίρνουμε :

$$\begin{aligned} A^R I_1^R + a_1^R I_0 + B^R I_1 &= v_1^R \\ a_2^{TR} I_1^R + a_0 I_0 + a_2^T I_1 &= v_0 \\ BI_1^R + a_1 I_0 + AI_1 &= v_1 \end{aligned}$$

Αλλά, η πρώτη είναι ακριβώς η αντίστροφη της τελευταίας, και έτσι απαλείφεται. Σημειώνοντας ότι $a^{TR}I_1^R = a_2^T I_1$ και $BI_1^R = BJI_1$, παίρνουμε το περιορισμένο σύστημα :

$$\begin{aligned} a_0 I_0 + 2a_2^T I_1 &= v_0 \\ a_1 I_0 + (A+BJ)I_1 &= v_1 \end{aligned}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων ως εξής :

$$\begin{bmatrix} a_0 & 2a_2^T \\ a_1 & A+BJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} \tag{4.7.10}$$

Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το NxN σύστημα (4.7.6) ή (4.7.9) με το $(M+1)\times(M+1)$ σύστημα (4.7.10) ενεργώντας μόνο στους μισούς παράγοντες. Θα γράψουμε την εξίσωση (4.7.10) με την εξής σύντομη μορφή :

$$\boxed{ZI = v = C_1 c + V_0 s} \tag{4.7.11}$$

όπου Z έχει κατασκευαστεί από το Z σύμφωνα με την (20.7.10) και οι παράγοντες αντιστοιχούν στους μισούς παράγοντες :

$$I = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \text{M} \\ I_M \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \text{M} \\ v_M \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \text{M} \\ c_M \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \text{M} \\ s_M \end{bmatrix} \tag{4.7.12}$$

Έπειτα επιβάλλουμε την συνθήκη $I_M = 0$. Μπορεί να γραφεί με τη μορφή $u^T I = 0$, όπου $u^T = [0,...,0,1]$. Λύνοντας την (4.7.11) για I έχουμε :

$$\boxed{I = C_1 Z^{-1} c + V_0 Z^{-1} s} \tag{4.7.13}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με u^T, παίρνουμε τη συνθήκη :

$$u^T I = C_1 u^T Z^{-1} c + V_0 u^T Z^{-1} s = 0$$

η οποία μπορεί να λυθεί για C_1 :

$$\boxed{C_1 = -V_0 \frac{u^T Z^{-1} s}{u^T Z^{-1} c}} \tag{4.7.14}$$

Οι δύο εξισώσεις (4.7.13) και (4.7.14) παρέχουν τη πλήρη λύση για την εξίσωση διάκρισης του Hallen. Η συνάρτηση MATLAB hallen ενεργοποιεί τη διαδικασία της λύσης. Είναι :

```
[I,z,cnd] = hallen(L,a,M);
```

Η συνάρτηση λύνει το μισό σύστημα (4.7.11) αλλά επιστρέφει το σύνολο των N-διάστασης συμμετρικών παραγόντων I της (4.7.7). Η ποσότητα z είναι ο N-διάστασης παράγοντας του δείγματος των σημείων z (4.7.4), και cnd είναι ο αριθμός της συνθήκης του πίνακα z που αντιστρέφεται. Οι ποσότητες L,a είναι το μήκος της κεραίας και η ακτίνα της σε μονάδες του λ

και το M είναι το ίδιο όπως και προηγουμένως. Υποθέτει ότι $V_0 = 1$. Έτσι, η σύνθετη αντίσταση της κεραίας θα είναι $Z_A = V_0 / I_0 = 1/I_0$.

Επειδή οι υποπίνακες A και B στην (4.7.10) είναι Toeplitz, ακολουθεί ότι ο αντίστροφος, κατά γραμμές, πίνακα BJ θα είναι Hankel. Αυτοί οι πίνακες κατασκευάζονται με τη βοήθεια των συναρτήσεων MATLAB, toeplitz και hankel. Δεν υπολογίζεται αντίστροφος του Z. Αντί αυτού, κάνουμε την απλή πράξη MATLAB, `Z\[c,s]`, από την οποία το υπόλοιπο της λύσης μπορεί να κατασκευαστεί.

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γρήγορους τρόπους επίλυσης Toeplitz, βασιζόμενοι στην επιστροφή Levinson, και γρήγορους παραγωγισμούς Cholesky. Εντούτοις, βρίσκουμε ότι ο τρόπος επίλυσης MATLAB είναι πιο γρήγορος για μεγέθη της τάξης $M = 20 - 100$.

4.8 Αριθμητική λύση χρησιμοποιώντας παλμικές συναρτήσεις

Το σχέδιο διάκρισης της συνάρτησης δέλτα λειτουργεί καλά. Ένα παράδειγμα παρουσιάστηκε στο σχήμα 4.6.1. Μια εναλλακτική σε αυτή τη διάκριση είναι να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις δέλτα με πεπερασμένους παλμούς πλάτους Δz, όποτε,

$$\delta(z - z_m)\Delta z \to \Delta(z - z_m)$$

όπου $\Delta(z)$ είναι ο μοναδιαίος παλμός που επικεντρώνεται στην περιοχή δημιουργίας του πεδίου:

$$\Delta(z) = u(z + \Delta z/2) - u(z - \Delta z/2) = \begin{cases} 1, if \left|z\right| \le \dfrac{1}{2}\Delta z \\ 0, otherwise \end{cases} \tag{4.8.1}$$

Η συνάρτηση δέλτα υπολογίζεται όταν $\Delta z \to 0$:

$$\delta(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta(z)}{\Delta z}$$

Η δειγματοληπτική ένταση (4.7.3) αντικαθίσταται τώρα από :

$$\boxed{I(z') = \sum_{m=-M}^{M} I(z_m)\Delta(z' - z_m)} \tag{4.8.2}$$

και η εξίσωση του Hallen γίνεται :

$$\sum_{m=-M}^{M} I(z_m)\int_{-h}^{h} Z(z - z')\Delta(z' - z_m)dz' = V(z) = C_1 \cos kz + V_0 \sin k\left|z\right|$$

Υπολογίζοντάς την για τα σημεία $z_n = n\Delta z$, για $-M \le n \le M$, έχουμε :

$$\sum_{m=-M}^{M} I(z_m)\int_{-h}^{h} Z(z_n - z')\Delta(z' - z_m)dz' = V(z_n) = C_1 \cos kz_n + V_0 \sin k\left|z_n\right|$$

Ορίζουμε τον πίνακα της σύνθετης αντίστασης ως :

$$Z_{nm} = \int_{-h}^{h} Z(z_n - z')\Delta(z' - z_m)dz' \tag{4.8.3}$$

Αλλάζοντας τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης σε $z'' = z' - z_m$, και σημειώνοντας ότι $\Delta(z'')$ έχει μοναδιαίο ύψος και βρίσκεται στο διάστημα *Δ(z)* που επικεντρώνεται στην περιοχή δημιουργίας του πεδίου, το παραπάνω εύρος της ολοκλήρωσης περιορίζεται σε :

$$Z_{nm} = \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} Z(z_n - z_m - z'')\Delta(z'')dz'' = \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} Z(z_n - z_m - z'')dz''$$

Αλλάζοντας ξανά μεταβλητές σε $z'' = x\Delta z$, έχουμε την τελική μορφή του πίνακα :

$$\boxed{Z_{nm} = \Delta z \int_{-1/2}^{1/2} Z(z_n - z_m - x\Delta z)dx} \tag{4.8.4}$$

όπου,

$$Z(z_n - z_m - x\Delta z) = \frac{j\eta}{2\pi}\frac{e^{-jkR}}{R}, \qquad R = \sqrt{a^2 + \Delta z^2(n - m - x)^2}$$

Η απορρέουσα εξίσωση διάκρισης του Hallen γίνεται :

$$\sum_{m=-M}^{M} Z_{nm} I_m = V(z_n) = C_1 \cos kz_n + V_0 \sin k|z_n| \tag{4.8.5}$$

και μπορεί να γραφεί με μια παρόμοια μορφή με την (4.7.6):

$$ZI = v = C_1 c + V_0 s \tag{4.8.6}$$

Η μοναδική διαφορά μεταξύ αυτής και της (4.7.6) είναι στον ορισμό του δείγματος της αντίστασης του πίνακα Z. Σε αυτή την περίπτωση, ο Z είναι Toeplitz, συμμετρικός και αμετάβλητος κατά την αντιστροφή. Έτσι, μπορεί να συμπτυχθεί στο μισό μέγεθος με τον ίδιο τρόπο όπως στην εξίσωση (4.7.11).

Η συνάρτηση MATLAB , hallen, εκπληρεί αυτή την περίπτωση. Η απαιτούμενη ολοκλήρωση ως προς x γίνεται χρησιμοποιώντας την τετραγωνιαία ολοκλήρωση Gauss–Legendre για N_{int} σημεία. Η συνάρτηση MATLAB, quadr, χρησιμοποιείται για να μας δώσει τα N_{int} βάρη και τα σημεία υπολογισμού τους :

```
[w,x] = quadr(-1/2, ½, Nint);
```

Το ολοκλήρωμα στην (4.8.4) υπολογίζεται από το γινόμενο :

$$Z_{nm} = w^T Z(z_n - z_m - x\Delta z)\Delta z \tag{4.8.7}$$

όπου $Z(z_n - z_m - x\Delta z)$ είναι η στήλη των τιμών του ολοκληρώματος για τα σημεία υπολογισμού Gauss–Legendre, x. Κάποια παραδείγματα βαρών και σημείων υπολογισμού δίνονται παρακάτω για $N_{\text{int}} = 1,2,3$:

$$w = [1], \qquad w = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} 0.2778 \\ 0.4444 \\ 0.2778 \end{bmatrix}$$

$$x = [0], \qquad x = \begin{bmatrix} -0.2887 \\ 0.2887 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} -0.3873 \\ 0.0000 \\ 0.3873 \end{bmatrix}$$

Ιδιαίτερα σημειώνουμε ότι η περίπτωση $N_{\text{int}} = 1$ έχει μοναδιαίο βάρος και σημείο υπολογισμού $x = 0$ έτσι ώστε η εξίσωση (4.8.7) να γίνει όμοια με την (4.7.8). Έτσι, η περίπτωση της συνάρτησης δέλτα γίνεται μια ειδική περίπτωση της θεώρησης μας για την περίπτωση του παλμού. Μπορούμε να ανακαλέσουμε τη συνάρτηση hallen με μια επιπλέον παράμετρο που να ορίζει τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης :

```
[I,z,cnd] = hallen(L,a,M,Nint);
```

Η συνάρτηση έχει ακόμη μια επιπρόσθετη μεταβλητή επιλογής , type, η οποία παίρνει τις τιμές 0,1 και ορίζει το επιθυμητό πλάνο δειγματοληψίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7.1. Έτσι, το πλήρες σετ των παραμέτρων εισόδου της συνάρτησης είναι :

```
[I,z,cnd] = hallen(L,a,M,Nint,type);
```

Η περίπτωση type-1 αντιστοιχεί στη διαίρεση της κεραίας σε $N = 2M + 1$ ίσα υποδιαστήματα, αντί για $(N-1)$ της περίπτωσης type-0. Τώρα, τα σημεία δειγματοληψίας ορίζονται ως ακολούθως, για $-M \le m \le M$:

$$z_m = m\Delta z, \qquad \Delta z = \frac{h}{M + 0.5} = \frac{l}{N} \tag{4.8.8}$$

Το τελευταίο δείγμα δεν φθάνει ακριβώς στο τέρμα της κεραίας, $z_M = M\Delta z = h - \Delta z/2$. Εντούτοις, η λύση μας ενισχύει την συνθήκη τελικού σημείου $I(z_M) = 0$. Αυτό δικαιολογείται σκεπτόμενοι ότι το $I(z_M)$ αναπαριστά την τιμή του τελευταίου διαστήματος μεταξύ των παλμών, το οποίο, όντως, επεκτείνεται μέχρι το τέρμα της κεραίας.

<u>Παράδειγμα 4.8.1:</u>
Για να πιστοποιήσουμε την δομή του πίνακα σύνθετης αντίστασης (4.8.4) και να δείξουμε πως συμπυκνώνεται στο μισό μέγεθος της (4.7.10), θεωρούμε την περίπτωση N=7 ή M=3. Επειδή ο Z είναι Toeplitz και συμμετρικός, μπορεί να κτιστεί με γνώση μόνο της πρώτης στήλης ή της πρώτης γραμμής. Η πρώτη γραμμή είναι $Z_{n,-M} = Z_{n+M,0}$, για $-M \le n \le M$. Θέτοντας $m = n + M$, έτσι ώστε $m = 0,1,...,2M$, η πρώτη γραμμή αποτελείται από τους αριθμούς :

$$a_m = \Delta z \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{-jkR}}{R} dx, \qquad R = \sqrt{a^2 + \Delta z^2 (m - x)^2} \tag{4.8.9}$$

Τότε, ο συνολικός πίνακας θα έχει τη μορφή :

$$Z=\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}\right]$$

όπου τον διαχωρίζουμε όπως στην (4.7.10) σε υποπίνακες :

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 \\ a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix}, \mathsf{a}_1=\mathsf{a}_2=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Έτσι, η συμπτυγμένη μορφή του Z θα είναι :

$$Z=\begin{bmatrix} a_0 & 2\mathsf{a}_2^{\mathsf{T}} \\ \mathsf{a}_1 & A+BJ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0 & 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ a_1 & a_0+a_2 & a_1+a_3 & a_2+a_4 \\ a_2 & a_1+a_3 & a_0+a_4 & a_1+a_5 \\ a_3 & a_2+a_4 & a_1+a_5 & a_0+a_6 \end{bmatrix} \tag{4.8.10}$$

Αυτός ο πίνακας μπορεί να κατασκευαστεί γρήγορα ως ακολούθως. Μιας και οι αριθμοί $a_m, m=0,1,...,2M$ υπολογίζονται, παίρνουμε τον πρώτο και τον τελευταίο M+1 αριθμούς, δηλαδή ορίζουμε τα δύο διανύσματα γραμμή $\mathsf{a}_t, \mathsf{a}_h$:

$$\mathsf{a}=[a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6] \Rightarrow \mathsf{a}_t=[a_0,a_1,a_2,a_3], \mathsf{a}_h=[a_3,a_4,a_5,a_6]$$

Έπειτα μορφοποιούμε τον πίνακα Toeplitz του οποίου η πρώτη γραμμή και στήλη θα είναι a_t, και τον προσθέτουμε στον πίνακα Hankel του οποίου η πρώτη στήλη είναι a_t και η τελευταία γραμμή είναι a_h. Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα από τις συναρτήσεις MATLAB toeplitz και hankel :

$$toeplitz(\mathsf{a}_t,\mathsf{a}_t)+hankel(\mathsf{a}_t,\mathsf{a}_h)=\begin{bmatrix} 2a_0 & 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 2a_1 & a_0+a_2 & a_1+a_3 & a_2+a_4 \\ 2a_2 & a_1+a_3 & a_0+a_4 & a_1+a_5 \\ 2a_3 & a_2+a_4 & a_1+a_5 & a_0+a_6 \end{bmatrix}$$

Έπειτα, αντικαθιστούμε την πρώτη στήλη με το μισό της τιμής της. Αυτές οι διαδικασίες συμπεριλαμβάνονται στη συνάρτηση hallen.

Παράδειγμα 4.8.2:

Ένα άλλο αριθμητικό θέμα είναι η ακρίβεια του ολοκληρώματος Gauss–Legendre. Η ακρίβεια μπορεί να βελτιωθεί αυξάνοντας το N_{int} (τυπικές τιμές 16–32). Αλλά μια καλύτερη μέθοδος είναι να κρατήσουμε το N_{int} σταθερό για μερικές τιμές, ας πούμε 16, και να χωρίσουμε το διάστημα του ολοκληρώματος σε περισσότερα υποδιαστήματα, για παράδειγμα:

$$\int_{-1/2}^{1/2} = \int_{-1/2}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{1/2}$$

Έπειτα υπολογίζουμε τα βάρη Legendre και τα σημεία υπολογισμού για κάθε υποδιάστημα :

```
[w1,x1] = quadr(-1/2, -delta, Nint);
[w2,x2] = quadr(-delta, delta, Nint);
[w3,x3] = quadr(delta, ½ Nint);
```

Και, τελικά, προσθέτουμε τις τιμές των υποδιαστημάτων. Αυτή η διαδικασία δεν ενεργοποιείται από την hallen, αλλά από τις συναρτήσεις king και imped, με τη δεύτερη να υπολογίζει την ιδία και την κοινή σύνθετη αντίσταση των κεραιών δίπολου.

4.9 Αριθμητική λύση για αυθαίρετο επικείμενο πεδίο.

Η αριθμητική λύση της εξίσωσης του Hallen για αυθαίρετο επικείμενο πεδίο, (4.7.2), μπορεί να επιτευχθεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση του διάκενου δέλτα. Υποθέτοντας μια επέκταση του βασικού παλμού τόσο για την ένταση όσο και για το επικείμενο πεδίο, έχουμε :

$$\begin{aligned} I(z') &= \sum_{m=-M}^{M} I(z_m)\Delta(z'-z_m) \\ E_{in}(z') &= \sum_{m=-M}^{M} E_{in}(z_m)\Delta(z'-z_m) \end{aligned} \tag{4.9.1}$$

Για δειγματοληψία στα σημεία $z_n = n\Delta z, -M \le n \le M$, το ολοκλήρωμα του επικείμενου πεδίου με την συνάρτηση Green γίνεται :

$$\int_{-h}^{h} F(z_n - z')E_{in}(z')dz' = \sum_{m=-M}^{M} E_{in}(z_m)\int_{-h}^{h} F(z_n - z')\Delta(z'-z_m)dz'$$

Όπως στην εξίσωση (4.8.3), ορίζουμε τον πίνακα Green :

$$F_{nm} = \int_{-h}^{h} F(z_n - z')\Delta(z'-z_m)dz' \tag{4.9.2}$$

Αλλάζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης σε $z' = z_m + x\Delta z$ μπορούμε να ξαναγράψουμε:

$$F_{nm}\Delta z\int_{-1/2}^{1/2} F(z_n - z_m - x\Delta z)dx \tag{4.9.3}$$

Και ειδικά, εάν χρησιμοποιήσουμε $F(z)=je^{-jk|z|}$ ως τη συνάρτηση Green :

$$F_{nm}=\Delta z\int_{-1/2}^{1/2} je^{-jk\Delta z|n-m-x|}dx \tag{4.9.4}$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς δίνοντας τα στοιχεία του πίνακα :

$$F_{nm}=\Delta z\left[\frac{1-\cos(k\,\Delta z/2)}{k\,\Delta z/2}\right]\delta_{nm}+\frac{\sin(k\,\Delta z/2)}{k\,\Delta z/2}je^{-jk\Delta z|n-m|} \tag{4.9.5}$$

Τότε, η εξίσωση διάκρισης του Hallen παίρνει τη μορφή :

$$\sum_{m=-M}^{M}Z_{nm}I_m=C_1e^{jkz_n}+C_2e^{-jkz_n}+\sum_{m=-M}^{M}F_{nm}E_m \tag{4.9.6}$$

όπου θεωρήσαμε $E_m=E_{in}(z_m)$. Η εξίσωση (4.9.6) μπορεί να γραφεί με την συμπτυγμένη μορφή :

$$ZI=C_1s_1+C_2s_2+FE \tag{4.9.7}$$

όπου s_1 και s_2 είναι τα διανύσματα με στοιχεία $s_1(n)=e^{jkz_n}$ και $s_2(n)=e^{-jkz_n}$. Ορίζοντας τον NX2 πίνακα $S=[s_1,s_2]$ και τα δισδιάστατα διανύσματα στήλη των σταθερών $C=[C_1,C_2]^T$, γράφουμε την εξίσωση (4.9.7) με τη μορφή:

$$ZI=SC+FE \tag{4.9.8}$$

Δεν είναι δυνατό να συμπτύξουμε αυτή την εξίσωση στο μισό διότι το Ε δεν είναι απαραίτητα συμμετρικό ως προς το κέντρο του. Οι σταθερές C πρέπει να βρεθούν επιβάλλοντας τις δύο ανεξάρτητες τελικές συνθήκες $I(z_M)=I(-z_M)=0$. Αυτές οι συνθήκες μπορούν να γραφούν συνοπτικά :

$$U^TI=0$$

όπου $U=[u_{top},u_{bot}]$ και το $u_{top}=[1,0,...,0]^T$ επιλέγει την πρώτη τιμή του διανύσματος I, ενώ $u_{bot}=[0,...,0,1]^T$ επιλέγει την τελευταία. Λύνοντας ως προς I έχουμε :

$$\boxed{I=\mathrm{Z}^{-1}SC+\mathrm{Z}^{-1}FE} \tag{4.9.9}$$

Πολλαπλασιάζοντας το αριστερό τμήμα με τον πίνακα U^T, παίρνουμε την συνθήκη:

$$U^TI=U^T\mathrm{Z}^{-1}SC+U^T\mathrm{Z}^{-1}FE=0$$

Η οποία μπορεί να λυθεί για C :

$$\boxed{C = -\left(U^T Z^{-1} S\right)^{-1}\left(U^T Z^{-1} F\right)E} \tag{4.9.10}$$

Οι δύο εξισώσεις (4.9.9) και (4.9.10) περιγράφουν την πλήρη λύση της εξίσωσης διάκρισης του Hallen (4.9.8). Η συνάρτηση MATLAB hallen2 ενεργοποιεί τη διαδικασία για αυτή τη λύση. Η χρήση της είναι :

```
[I,z,cnd] = hallen2(L,a,E,Nint,type);
```

όπου αντί για την παράμετρο M, έχει σαν είσοδο το διάνυσμα E των δειγμάτων του επικείμενου πεδίου. Η διάσταση $N = 2M + 1$ παράγεται από το μήκος του E. Οι σταθερές τιμές των δύο τελευταίων παραμέτρων εισόδου είναι $N_{\text{int}} = 16$ και $type = 1$.

Οι συναρτήσεις hallen και hallen2 παράγουν πρακτικά όμοιες εξόδους στην περίπτωση του διάκενου δέλτα, δηλαδή όταν το επικείμενο πεδίο είναι :

$$E = \left[\underbrace{0,0,\ldots,0}_{Mzeros},\frac{1}{\Delta z},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{Mzeros}\right]^T \tag{4.9.11}$$

Η μεσαία τιμή μιμείται το διάκενο δέλτα $V_0\delta(z) \cong V_0\,\Delta(z)/\Delta z = V_0/\Delta z$. Για την περίπτωση ενός επικείμενου πεδίου σε μια πολική γωνία θ όπως στην εξίσωση (4.2.3), η δειγματοληψία για το E θα παίρνει τιμές για $-M \le n \le M$:

$$E_n = E_0 \sin\theta e^{jkz_n \cos\theta} \tag{4.9.12}$$

4.10 Αριθμητική Λύση για την Εξίσωση του Pocklington.

Η εξίσωση του Pocklington (4.1.10) είναι μια εναλλακτική εξίσωση για τον καθορισμό της έντασης $I(z)$ που παράγεται από ένα επικείμενο πεδίο $E_{in}(z)$. Μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με παρόμοιες τεχνικές διάκρισης όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αναπροσαρμόζοντας τις σταθερές στην (4.1.10), μπορούμε να τη γράψουμε με τη μορφή :

$$\boxed{\int_{-h}^{h} I(z')Z(z-z')dz' = E_{in}(z)} \tag{4.10.1}$$

όπου ορίσαμε την σύνθετη αντίσταση kernel του Pocklington με :

$$Z(z-z') = \frac{j\eta\lambda}{8\pi^2}\left(\partial_z^2 + k^2\right)G(z-z') \tag{4.10.2}$$

Υποθέτοντας μια επέκταση της συνάρτησης παλμού του τύπου της εξίσωσης (4.8.2) και υπολογίζοντας την (4.10.1) για δειγματοληψία σημείων $z_n = n\Delta z$, έχουμε την εκδοχή της διάκρισης :

$$\sum_{m=-M}^{M} I(z_m)\int_{-h}^{h} Z(z_n - z')\Delta(z' - z_m)dz' = E(z_n) \tag{4.10.3}$$

Όπως πριν, ορίζουμε τον πίνακα σύνθετης αντίστασης (μονάδες σε ohm/m) :

$$Z_{nm} = \int_{-h}^{h} Z(z_n - z')\Delta(z' - z_m)dz' = \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} Z(z_n - z_m - z'')dz'' \tag{4.10.4}$$

Ένα μέρος αυτού του ολοκληρώματος μπορεί να γίνει απευθείας, χωρίς προσεγγίσεις. Έχουμε:

$$Z_{nm} = \frac{j\eta\lambda}{8\pi^2}\int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2}\left(\partial_{z''}^2 + k^2\right)G(z_n - z_m - z'')dz''$$

όπου αντικαταστήσαμε ∂_z^2 με $\partial_{z''}^2$. Ολοκληρώνοντας τον πρώτο όρο έχουμε :

$$Z_{nm} = \frac{j\eta\lambda}{8\pi^2}\left[\partial_{z''}G(R_+) - \partial_{z''}G(R_-) + k^2\int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} G(z_n - z_m - z'')dz''\right]$$

όπου :

$$\begin{aligned} R_+ &= \sqrt{a^2 + \left(z_{nm}^+\right)^2}, \qquad z_{nm}^+ = z_n - z_m - \frac{1}{2}\Delta z \\ R_- &= \sqrt{a^2 + \left(z_{nm}^-\right)^2}, \qquad z_{nm}^- = z_n - z_m + \frac{1}{2}\Delta z \end{aligned} \tag{4.10.5}$$

Χρησιμοποιώντας την παράγωγο $\partial_{z'}G(R) = (z - z')(1 + jkR)e^{-jkR}/R^3$, έχουμε:

$$Z_{nm} = \frac{j\eta\lambda}{8\pi^2}\left[\frac{z_{nm}^+}{R_+^3}(1 + jkR_+)e^{-jkR_+} - \frac{z_{nm}^-}{R_-^3}(1 + jkR_-)e^{-jkR_-} + G_{nm}\right] \tag{4.10.6}$$

όπου

$$G_{nm} = k^2\int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} G(z_n - z_m - z'')dz'' \tag{4.10.7}$$

Αυτός ο όρος πρέπει να υπολογιστεί με αριθμητική ολοκλήρωση. Με τους ορισμούς (4.10.5) και (4.10.7), η εξίσωση διάκρισης του Pocklington γίνεται :

$$\sum_{m=-M}^{M} Z_{nm} I_m = E_n \tag{4.10.8}$$

η οποία μπορεί να γραφεί με τη μορφή πίνακα :

$$ZI = E \tag{4.10.9}$$

με λύση $I = Z^{-1}E$. Η συνάρτηση MATLAB pockling, ενεργοποιεί τη διαδικασία της λύσης. Έχει τις ίδιες εισόδους και εξόδους με την hallen2, με χρήση :

```
[I,z,cnd = pockling(L,a,E,Nint,type);
```

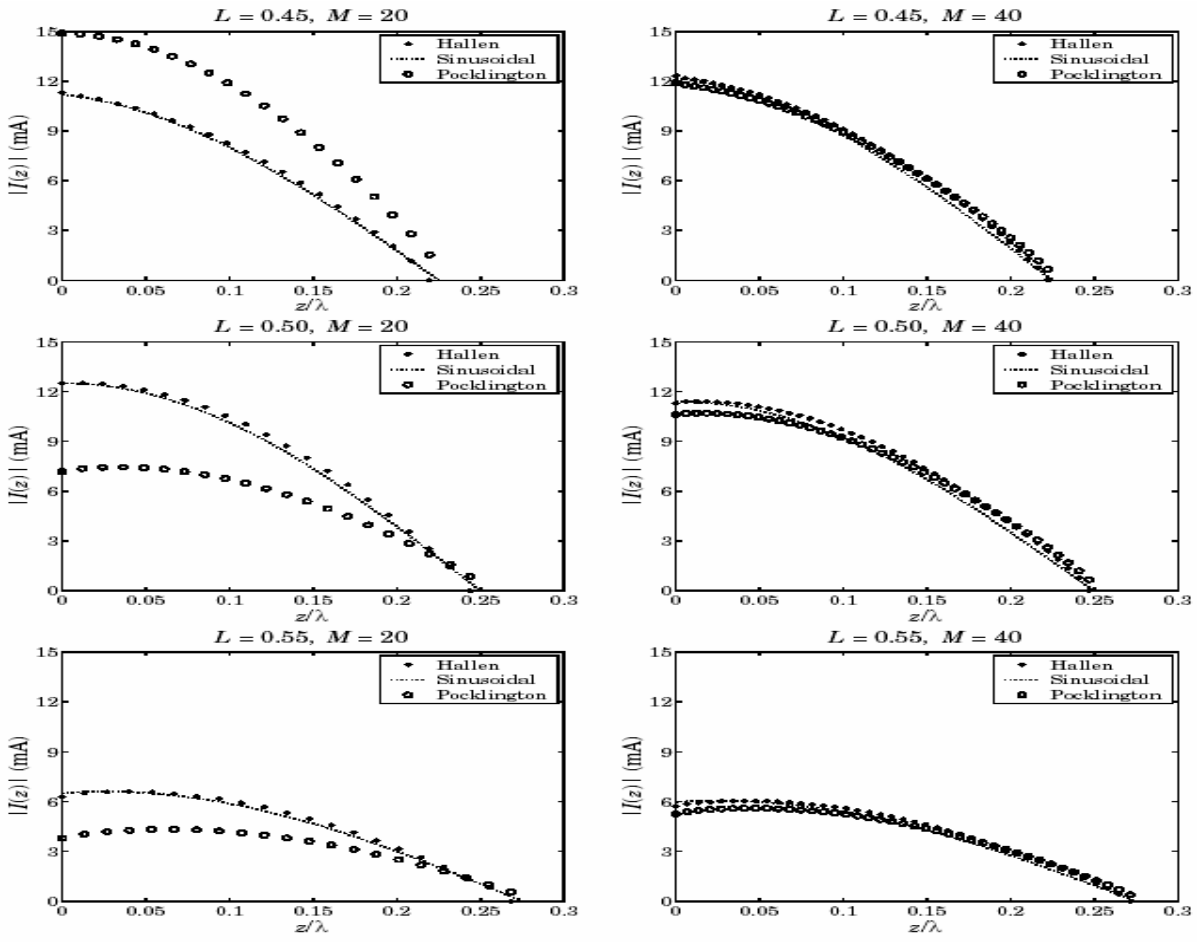
Επειδή η Pocklington kernel εξαρτάται από το R όπως $1/R^3$, ο πίνακας της αντίστασης της εξίσωσης (4.10.9) γίνεται περισσότερο μοναδικός από την περίπτωση Hallen η οποία έχει kernel που έχει εξάρτηση του τύπου 1/R.

Ειδικά, για την ίδια τιμή του M, ο αριθμός συνθήκης της (4.10.9) μπορεί να είναι μιας ή δύο τάξεων μεγέθους μεγαλύτερος από αυτόν των εξισώσεων (4.7.11) ή (4.9.8). Επιπλέον, η λύση Pocklington απαιτεί πολύ μεγαλύτερη τιμή του M για να φτάσουμε σε πραγματική λύση. Οι παρατηρήσεις αυτές παρουσιάζονται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.10.1. :

Για κεραίες μήκους περίπου *λ/2*, η ημιτονοειδής υπόθεση για την διανομή της έντασης είναι προσεγγιστικά σωστή.

Στο παράδειγμα αυτό, υπολογίζουμε τις λύσεις Hallen και Pocklington για τις εντάσεις στις τρεις περιπτώσεις $l = 0.45\lambda, 0.50\lambda, 0.55\lambda$ και συγκρίνουμε με την ημιτονοειδή ένταση. Η ακτίνα της κεραίας ήταν $a = 0.001\lambda$ σε όλες τις περιπτώσεις. Το σχήμα 4.10.1 δείχνει τις υπολογισμένες εντάσεις για τις περιπτώσεις M=20 και M=40.



Σχήμα 4.10.1: Σύγκριση μεταξύ λύσεων Hallen και Pocklington για $l = 0.45\lambda, 0.50\lambda, 0.55\lambda$.

Η εξίσωση του Hallen συγκλίνει και για τις δύο τιμές του M, αλλά η Pocklington μόνο για M=40. Επίσης, οι αριθμοί συνθήκης των γραμμικών συστημάτων (4.7.11) και (4.10.9) είναι πολύ διαφορετικοί. Για παράδειγμα, για το μισό μήκος κύματος της κεραίας, οι αριθμοί συνθήκης του Hallen είναι 3.24 και 5.16 για M=20 και M=40, αλλά του Pocklington είναι αντίστοιχα 943.44 και 4519.76. Τα γραφήματα αυτά παράχθηκαν από τον ακόλουθο κώδικα MATLAB :

```
L = 0.50; h = L/2;

a = 0.001; type = 1; Nint = 16; M = 20;

Dz = h/(M+type*0.5);

E = zeros(2*M+1,1); E(M+1) = 1/Dz;

[Ich,zh,ch] = hallen(L,z,M,Nint,type);
[Ip,zp,cp] = pockling(L,a,E,Nint,type);
Ih = abs(Ich(M+1:end));
zh = zh(M+1:end);
Ip = abs(Ip(M+1:end));

A = max(Ih);
z = 0 : Dz/20 : h;
I = kingeval(L,A,z);

plot(zh,Ih,'.', z,I,':', zh,Ip,'o');
```

Στον παραπάνω κώδικα, A είναι η μέγιστη τιμή της έντασης του Hallen και χρησιμεύει ως ένας κλιμακωτός συντελεστής για την ημιτονοειδή ένταση, δηλαδή $I(z)=A\sin(k(h-|z|))$. Η συνάρτηση kingeval απλώς υπολογίζει την ημιτονοειδή έκφραση σε ένα πυκνό σετ z σημείων.

Παράδειγμα 4.10.2:

Ως άλλο παράδειγμα, θεωρούμε τις περιπτώσεις $l=\lambda,1.5\lambda,2\lambda$. Το σχήμα 20.10.2 δείχνει τις υπολογισμένες εντάσεις για M=30 και M=60.

Παρατηρείται ξανά η ίδια αργή συγκλίνουσα συμπεριφορά με την περίπτωση Pocklington. Η ημιτονοειδής ένταση $I(z)=A\sin(k(h-|z|))$ δεν είναι καλή προσέγγιση στο z=0 για τις περιπτώσεις $l=\lambda$ και $l=2\lambda$ αλλά δουλεύει καλά για $l=1.5\lambda$.

Παράδειγμα 4.10.3:

Στη συνέχεια, θεωρούμε την περίπτωση ενός επικείμενου πεδίου στην ευρεία περιοχή (θ=90^o) μιας γραμμικής κεραίας μήκους $l=1.2\lambda$ και ακτίνας $a=0.001\lambda$. Το σχήμα 20.10.3. δείχνει τις υπολογισμένες εντάσεις σύμφωνα με τις εξισώσεις Pocklington και Hallen, για M=30 και M=40.

Η ένταση Hallen υπολογίστηκε με την συνάρτηση hallen2. Κάτι που επιβλήθηκε σε κάθε γράφημα είναι η ένταση που βασίζεται στην ημιτονοειδή προσέγγιση της (4.5.1), η καλύτερα της (4.5.2), που είναι, $I(z)=\cos kh-\cos kz$. Η ημιτονοειδής ένταση κανονικοποιήθηκε έτσι ώστε η μέγιστη τιμή της να συμφωνεί με τη μέγιστη της Hallen. Ο κώδικας MATLAB για το παράδειγμα αυτό είναι :

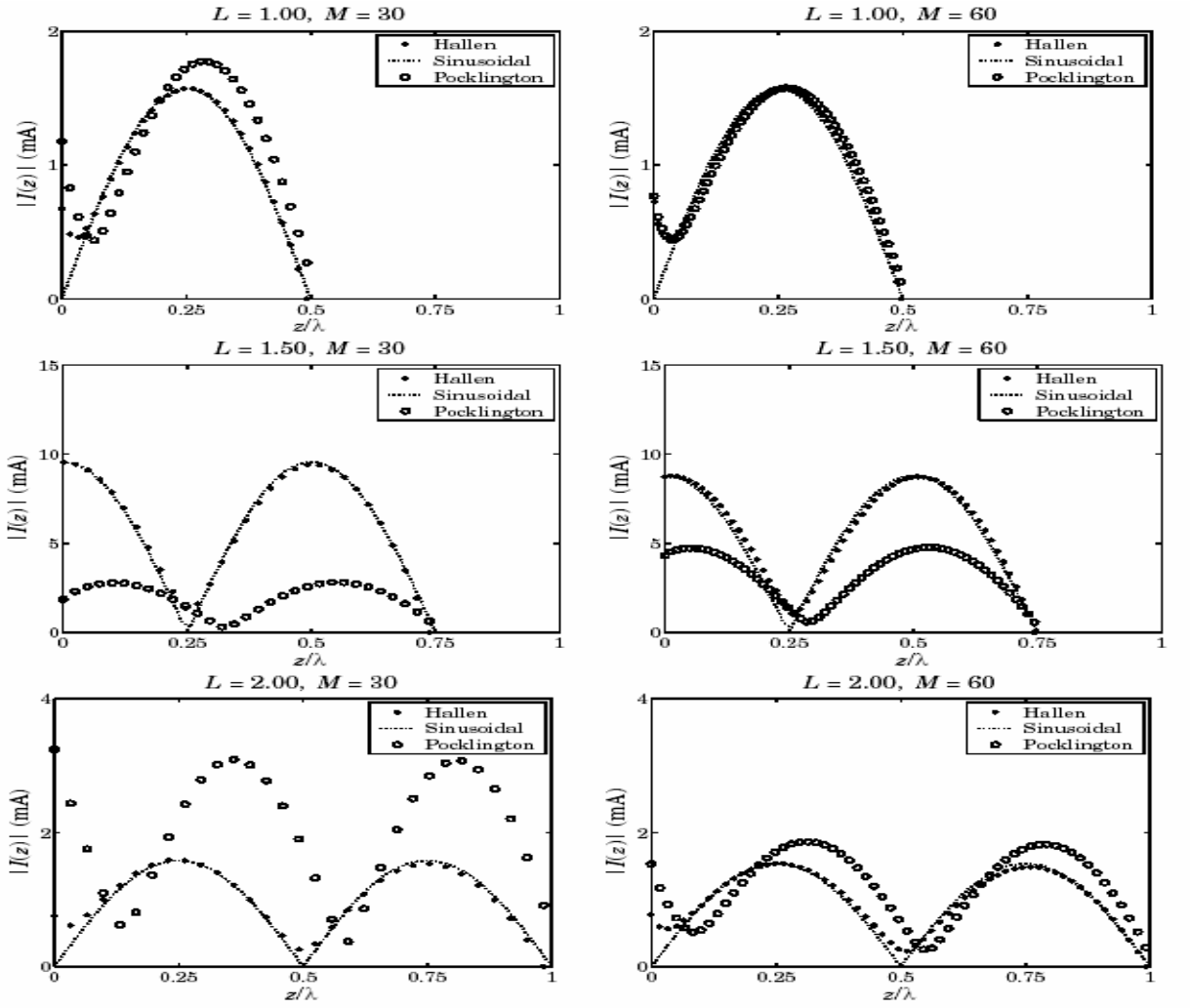
```
L = 1.2; h = L/2; a = 0.001;
k = 2*pi; th = pi/2; M = 30;

Dz = h/(M+0.5);
zm = (-M:M)*Dz;
E = exp(j*k*zm*cos(th));

[Ih,zh,ch] = hallen2(L,a,E,16,1);
[Ip,zp,cp] = pockling(L,a,E,16,1);

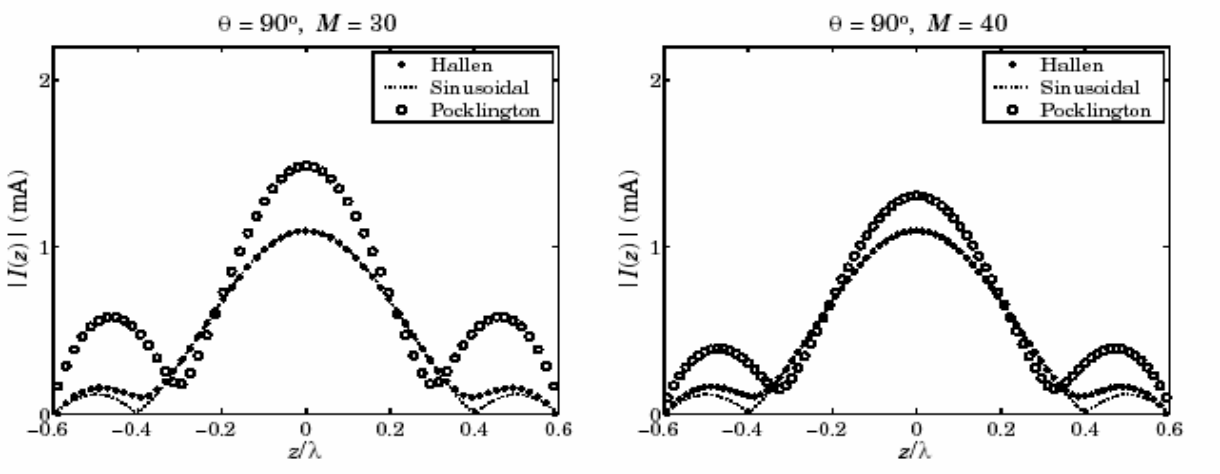
z = -h:(Dz/20):h; I = cos(k*h) - cos(k*z);

Ih = abs(Ih); Ip = abs(Ip); I = abs(I); mh = max(Ih); mp =
max(Ip);
I = I/max(I) * mh;
plot(zh, Ih, '.', z, I, ':', zh, Ip, 'o');
```

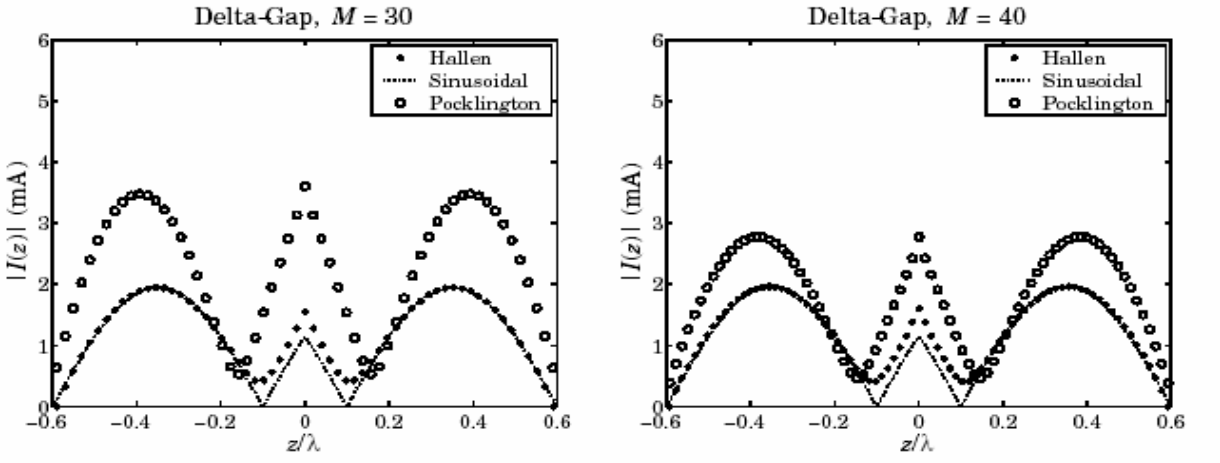


Σχήμα 4.10.2: Σύγκριση μεταξύ λύσεων Hallen και Pocklington για $l = \lambda, 1.5\lambda, 2\lambda$.

Για να τονίσουμε την εξάρτηση της παραγόμενης έντασης από τον τύπο του επικείμενου πεδίου, δείχνουμε στο σχήμα 4.10.4 την ένταση στην περίπτωση του διάκενου δέλτα και την συγκρίνουμε με την ημιτονοειδή ένταση $I(z)=A\sin\left(k\left(h-|z|\right)\right)$. Σε όλες τις περιπτώσεις η λύση Pocklington βελτιώνεται καθώς αυξάνεται το M.



Σχήμα 4.10.3: Λύσεις Hallen και Pocklington για πλευρικώς επικείμενο πεδίο.



Σχήμα 4.10.4: Λύσεις Hallen και Pocklington στην περίπτωση διάκενου δέλτα.

Παρατηρούμε σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα ότι η ένταση Pocklington δεν απαιτείται να εξαφανίζεται στο τελευταίο σημείο της δειγματοληψίας, όπως στην περίπτωση Hallen. Πάραυτα, οι εντάσεις Pocklington τείνουν να γίνουν μηδέν στα τελικά σημεία της κεραίας καθώς το M γίνεται μεγαλύτερο.

Σε ολόκληρο το κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με την φύση των εντάσεων σε μια μονή γραμμική κεραία.

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Hallen και Pocklington γενικοποιούνται με ένα σύστημα πολλών εξισώσεων ολοκληρωμάτων για τις εντάσεις που παράγονται στις κεραίες. Λύσαμε τα ζεύγη των εξισώσεων Hallen στην περίπτωση του διάκενου δέλτα κέντροτροφοδοτούμενης κεραίας. Η γραμμικότητά τους μας επιτρέπει να τις συμπεριλάβουμε σε ένα σύστημα πινάκων από το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τις εντάσεις σε κάθε κεραία.

Εμφανίζεται μια απλοποίηση στην περίπτωση συστήματος όμοιων κεραιών. Έτσι, το γραμμικό σύστημα μπορεί να συμπτυχθεί στο μισό όπως έγινε στο κεφάλαιο 4.7, μειώνοντας

έτσι την υπολογιστική αξία. Η συνάρτηση MATLAB hallen3 ενεργοποιεί αυτή την ειδική περίπτωση.

Επιπλέον εξετάζεται η περίπτωση ενός συστήματος ανόμοιων κεραιών, οπότε παίρνουμε λύσεις για κεραίες Yagi–Uda με παρασιτικούς ανακλαστήρες και κατευθυντικές κεραίες. Αυτή η περίπτωση ενεργοποιείται από τη συνάρτηση MATLAB hallen4.

Κεφάλαιο 5

Εισαγωγή στο Mathematica

5.0 Γενικά για το Mathematica:

Το Mathematica είναι ένα ολοκληρωμένο περιβάλλον για πολλών ειδών υπολογισμούς. Δημιούργημα των ερευνών Wolfram, μιας παγκοσμίου κλάσεως ομάδας με επικεφαλής το Stephen Wolfram, πρωτοεκδόθηκε το 1988 ανατρέποντας τα έως τότε δεδομένα στον τρόπο χρήσης των Η/Υ, τόσο στον τεχνικό, όσο και σε άλλους τομείς.

Έως τότε υπήρχαν μεμονωμένα πακέτα για συγκεκριμένους αριθμητικούς και αλγεβρικούς υπολογισμούς ή για τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων. Η αρχική ιδέα την οποία έπρεπε να εξυπηρετήσει το Mathematica ήταν η δημιουργία ενός μοναδικού συστήματος για όλους τους παραπάνω υπολογισμούς, χρησιμοποιώντας μια απλή και κατανοητή μέθοδο.

Η υλοποίηση αυτής της ιδέας έγινε εφικτή με τη δημιουργία μιας συμβολικής γλώσσας η οποία θα μπορούσε να χειριστεί ένα μεγάλο εύρος αντικειμένων που σχετίζονται με τους τεχνικούς υπολογισμούς, χρησιμοποιώντας ένα μικρό αριθμό βασικών αρχικών στοιχείων.

Το Mathematica, που από την πρώτη στιγμή της έκδοσής του κατατάχθηκε στις σημαντικότερες εφευρέσεις της χρονιάς, αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τις φυσικές επιστήμες, τους μηχανικούς και τα μαθηματικά. Αργότερα, όμως, έγινε απαραίτητο μέσο σε πολύ περισσότερους τομείς .

Σε τεχνικό επίπεδο, το Mathematica είναι ευρέως αναγνωρισμένο ως η μεγαλύτερη ανακάλυψη στον τομέα των λογισμικών. Είναι ένα από τα μεγαλύτερα προγράμματα που έχουν αναπτυχθεί και περιέχει ένα μεγάλο αριθμό νέων αλγορίθμων και σημαντικών τεχνικών καινοτομιών.

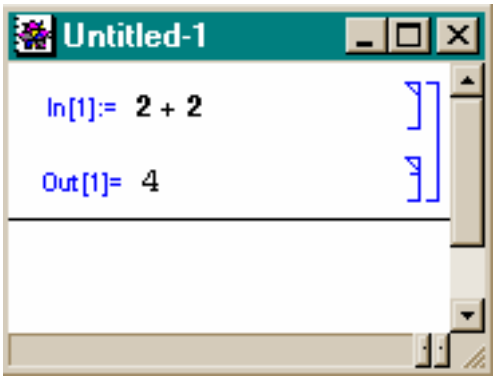
Σε αυτή τη φάση θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε τις λειτουργίες του προγράμματος αυτού, και κυρίως αυτές τις οποίες εμείς εκμεταλλευόμαστε για την επίτευξη του σκοπού μας, όσο καλύτερα μπορούμε, ώστε ο αναγνώστης αυτού του εγχειριδίου να τις κατανοήσει και να μπορέσει να χρησιμοποιήσει το περιβάλλον εξομοίωσης το οποίο θα δημιουργήσουμε.

Σε αυτό το μέρος λοιπόν θα αναφέρουμε μερικές από τις βασικές λειτουργίες του Mathematica καθώς και παραδείγματα για κάθε μια από αυτές.

5.1 Πώς να τρέξετε το Mathematica.

Αφού μπείτε στο Mathematica, θα εμφανιστεί μια κενή σελίδα. Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι απαραίτητο να πληκτρολογήσετε τη λέξη mathematica για να ξεκινήσει. Στη συνέχεια, πατώντας Shift-Return (κρατώντας πατημένο το πλήκτρο Shift πιέστε το Return), το "mathematica" γίνεται αυτόματα είσοδος, η οποία δηλώνεται ως εξής : *In[n]:=.*
Το Shift – Return λέει στο Mathematica ότι έχει τελειώσει η είσοδος. Βέβαια, σε ορισμένες περιπτώσεις το τέλος της εισόδου μπορεί να δηλωθεί μόνο με Return .
Μετά την ολοκλήρωση της εισόδου, το Mathematica θα εμφανίσει την έξοδο, η οποία δηλώνεται ως εξής: *Out[n]* =
Σε άλλες περιπτώσεις, το Mathematica ξεκινά πληκτρολογώντας την εντολή math και στη συνέχεια πατώντας Shift – Return .

Επιλέγοντας την εντολή Exit από το File του Menu θα βγείτε από το Mathematica.
Παρακάτω φαίνεται ένα απλό παράδειγμα:



Πατώντας 2+2 και τελειώνοντας τη είσοδο με Shift – Return, το Mathematica θα κάνει την πρόσθεση και θα δώσει την έξοδο.

5.2 Αριθμητικοί υπολογισμοί.

Στο παραπάνω παράδειγμα φαίνεται μια πρόσθεση. Με όμοιο τρόπο μπορούν να γίνουν όλες οι αριθμητικές πράξεις. Παρακάτω φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο γίνονται αυτές οι πράξεις.

x^y	δύναμη
-x	μείον
x/y	διαίρεση
x y z ή x*y*z	πολλαπλασιασμός
x + y +z	πρόσθεση

Ορισμένα παραδείγματα φαίνονται παρακάτω:

```
In[1]:= 5.8 + 3.7

Out[1]= 9.5

In[2]:= 8.7 / 5.63^2

Out[2]= 0.274475

In[3]:= 5 7 3 - 5^3 (6 - 8)

Out[3]= 355
```

Πρόσθεση 2 αριθμών

Το σύμβολο ^ εκφράζει δύναμη, ενώ το / εκφράζει διαίρεση

Μπορούμε στις αριθμητικές εκφράσεις να χρησιμοποιήσουμε και παρενθέσεις

Οι πράξεις γίνονται με την ίδια σειρά, τη γνωστή από τα μαθηματικά .

Τα αποτελέσματα στο Mathematica είναι απολύτως ακριβή, ακόμα και αν περιέχουν πολύ μεγάλο αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Το Mathematica όμως μας δίνει τη δυνατότητα να πάρουμε και στρογγυλοποιημένα αποτελέσματα, χρησιμοποιώντας την έκφραση :

expr // N

Παράδειγμα :

```
In[6]:= 1 / 3 + 2 / 7 // N

Out[6]= N[13/21]
```

Παρακάτω φαίνονται ορισμένες από τις πιο διαδεδομένες συναρτήσεις στο Mathematica:

Sqrt[x]	Τετραγωνική ρίζα $(\sqrt{x})$
Exp[x]	Εκθετική συνάρτηση (e^x)
Log[x]	Φυσικός λογάριθμος $(\log_e x)$
Log[b , x]	Λογάριθμος με βάση b του x $(\log_b x)$
Sin[x] , Cos[x] , Tan[x]	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
ArcSin[x] , ArcCos[x] , ArcTan[x]	Αντίστροφες τριγωνομετρικές εξισώσεις
n!	Παραγοντικό
Abs[x]	Απόλυτη τιμή
Round[x]	Πλησιέστερος ακέραιος στο x
Mod[n , m]	n modulo m (υπόλοιπο της διαίρεσης του n από το m
Random[ ]	Ψευδοτυχαίος αριθμός μεταξύ 0 και 1
Max[x , y , …] , Min[x , y , …]	Μέγιστο και ελάχιστο μεταξύ των x , y , …

Όπως φαίνεται και παραπάνω, όλα τα ορίσματα στο Mathematica βρίσκονται μέσα σε αγκύλες, όχι παρενθέσεις. Οι παρενθέσεις χρησιμοποιούνται μόνο για να δηλώσουν ομαδοποίηση των όρων και όχι για τα ορίσματα. Επίσης, το πρώτο γράμμα όλων των συναρτήσεων είναι κεφαλαίο.

Παραδείγματα :

```
In[1]:= Log[9.3]
Out[1]= 2.23001
In[2]:= 5!
Out[2]= 120
In[3]:= Sqrt[6]
Out[3]= √6
In[4]:= Round[5.3]
Out[4]= 5
```

Δίνει το λογάριθμο του 9.3 με βάση το e

Δίνει το παραγοντικό του 5
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Επειδή το αποτέλεσμα αυτής της πράξης δεν είναι στρογγυλός αριθμός, το Mathematica δίνει το αποτέλεσμα σε συμβολική μορφή.

Ο κοντινότερος στο δεκαδικό 5.3 αριθμό είναι το 5

Παρακάτω φαίνονται μερικά σημαντικά σύμβολα στο Mathematica.

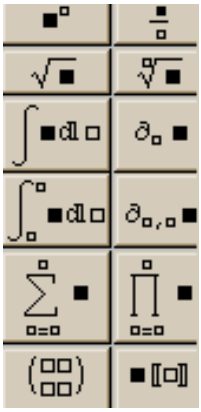
Pi	$\pi \cong 3.14159$
E	$e \cong 2.71828$
Degree	$\pi/180$ (συντελεστής μετατροπής μοιρών σε rad)
I	$i = \sqrt{-1}$
Infinity	∞

5.2.1 Μαθηματικά σύμβολα στο Mathematica.

Το Mathematica version 3.0, διαθέτει μια παλέτα η οποία λειτουργεί σαν επέκταση του πληκτρολογίου και περιέχει πλήκτρα, τα οποία πατώντας τα εισάγουν κάποια συγκεκριμένα σύμβολα.
Επιλέγοντας το File από το κύριο μενού και στην συνέχεια Palletes μπορούμε να επιλέξουμε αυτή που μας ενδιαφέρει.
Παρακάτω φαίνονται κάποιες τέτοιες παλέτες:



Πατώντας το π, ένα pi θα εισαχθεί στη σελίδα του Mathematica.



Υπάρχουν περιπτώσεις που επιθυμούμε να διακόψουμε κάποιο υπολογισμό του Mathematica. Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Σε ορισμένα συστήματα η διακοπή γίνεται πατώντας Command – Comma ή Alt – Comma ή με Control – C. Μετά τη διακοπή, το Mathematica θα δώσει ένα κατάλογο με πιθανές επόμενες ενέργειες.

Continue	Συνεχίζεται ο υπολογισμός
show	Εμφανίζει τι κάνει το Mathematica τη συγκεκριμένη στιγμή
inspect	Επιθεωρεί την τρέχουσα κατάσταση του υπολογισμού
abort	Διακόπτει το συγκεκριμένο υπολογισμό
exit	Έξοδος από το Mathematica

5.3 Αλγεβρικοί υπολογισμοί.

```
In[1]:= 5 x - 9 x - 3 x^2 + 5

Out[1]= 5 - 4 x - 3 x^2
```

Το Mathematica μπορεί να κάνει υπολογισμούς και με σύμβολα, εκτός από αριθμούς. Ένα απλό παράδειγμα είναι το εξής:

Το x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να πάρει διάφορες τιμές. Αν λοιπόν θέσουμε μια τιμή στο x η παραπάνω πράξη θα δώσει αριθμητικό αποτέλεσμα . Δηλαδή:

```
In[1]:= x = 5

Out[1]= 5

In[2]:= 5 x - 9 x - 3 x^2 + 5

Out[2]= -90
```

Θέτουμε το x ίσο με 5

Γίνεται η πράξη με την τιμή 5 για το x και το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός .

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γίνει και με διαφορετικό τρόπο:

```
In[1]:= 1 + 2 x /. x → 3

Out[1]= 7
```

Αν θέλουμε να δώσουμε στο x μια τιμή, πχ 3, τυπώνουμε το σύμβολο →μεταξύ του x και του 3 και σημαίνει ότι το x παίρνει την τιμή 3. Έτσι:

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που επιθυμούμε να γράψουμε μια αλγεβρική έκφραση σε απλούστερη μορφή. Το Mathematica μας δίνει αυτή τη δυνατότητα με τους εξής δύο τρόπους:

Simplify[expr]	Προσπαθεί να βρει την απλούστερη μορφή της έκφρασης expr χρησιμοποιώντας διάφορους μετασχηματισμούς από τα απλά μαθηματικά.
FullSimplify[expr]	Προσπαθεί να βρει την απλούστερη μορφή χρησιμοποιώντας μεγαλύτερο εύρος μετασχηματισμών .

Παράδειγμα :

```
In[2]:= Simplify[x^2 + 2 x + 1]

Out[2]= (1 + x)^2
```

5.4 Συμβολικά Μαθηματικά.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το Mathematica έχει τη δυνατότητα να χειρίζεται συμβολικές εκφράσεις το ίδιο καλά με τους αριθμούς. Αυτό μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε και σε άλλα είδη Μαθηματικών, πέρα των αριθμητικών υπολογισμών, όπως για παράδειγμα στην Ανάλυση. Ορισμένες βασικές συμβολικές εκφράσεις στο Mathematica είναι οι εξής:

D[f , x]	Μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}$
Integrate [f , x]	Ολοκλήρωμα $\int f dx$
Sum [f , {i , imin , imax}]	Άθροισμα $\sum_{i=i\min}^{i\max} f$
Solve [lhs = = rhs , x]	Λύση μιας εξίσωσης του x
Limit [f , x → x_0]	Το όριο της f με x → x_0

Παρακάτω αναφέρονται παραδείγματα για την κατανόηση των παραπάνω λειτουργιών.

5.4.1 Παραγώγιση:

```
In[1]:= D[x^n, x]
Out[1]= n x^(-1+n)

In[2]:= D[ArcTan[x], x]
Out[2]= 1/(1+x^2)

In[3]:= D[x^n, {x, 3}]
Out[3]= (-2+n) (-1+n) n x^(-3+n)
```

Δίνει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης x^n ως προς x .

Το Mathematica γνωρίζει τις παραγώγους όλων των γνωστών μαθηματικών συναρτήσεων.

Εδώ γίνεται παραγώγιση της συνάρτησης x^n 3 φορές.

Η λειτουργία $D[x^n , x]$ δίνει τη μερική παράγωγο υποθέτοντας ότι το n δεν εξαρτάται από το x. Το Mathematica έχει και μια άλλη λειτουργία, που ονομάζεται Dt, που βρίσκει ολικές παραγώγους στις οποίες όλες οι μεταβλητές σχετίζονται. Έτσι , το $D[f , x]$σημαίνει $\frac{\partial f}{\partial x}$ ενώ το $Dt[f , x]$ σημαίνει $\frac{df}{dx}$.

Παραδείγματα αυτής της λειτουργίας είναι τα εξής:

```
In[1]:= Dt[x^n, x]
Out[1]= n x^(-1+n) + x^n Dt[n, x] Log[x]

In[2]:= Dt[x^n]
Out[2]= n x^(-1+n) Dt[x] + x^n Dt[n] Log[x]
```

Το Dt δίνει την ολική παράγωγο της συνάρτησης x^n, υποθέτοντας ότι εξαρτάται από το x.

Δίνει το ολικό διαφορικό $d(x^n)$.

5.4.2 Ολοκλήρωση:

Για την ολοκλήρωση υπάρχουν οι εξής εντολές:

Integrate [f , x]	Αόριστο ολοκλήρωμα $\int fdx$
Integrate [f , x , y]	Πολλαπλό ολοκλήρωμα $\int dxdyf$
Integrate [f ,{x , xmin , xmax}]	Ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{x\min}^{x\max} fdx$
Integrate [f ,{x , xmin , xmax},{y, ymin , ymax}]	Πολλαπλό ορισμένο $\int_{x\min}^{x\max} dx \int_{y\min}^{y\max} dy$

Παραδείγματα:

```
In[3]:= Integrate[Log[x], {x, a, b}]
Out[3]= -a (-1 + Log[a]) + b (-1 + Log[b])
In[4]:= Integrate[Exp[-x^2], {x, 0, Infinity}]
```

$$\text{Out[4]=} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

```
In[5]:= Integrate[x^x, {x, 0, 1}]
```

$$\text{Out[5]=} \quad \int_0^1 x^x \, dx$$

```
In[6]:= Integrate[x^2 + y^2, {x, 0, 1}, {y, 0, x}]
```

$$\text{Out[6]=} \quad \frac{1}{3}$$

5.4.3 Άθροισμα:

Sum[f ,{i , imin , imax}]	Άθροισμα $\sum_{i\,\min}^{i\,\max} f$
Sum[f ,{i ,imin , imax , di}]	Άθροισμα όπου το I αυξάνει με ένα βήμα di .
Sum[f ,{i , imin , imax},{j , jmin , jmax}]	Πολλαπλό άθροισμα $\sum_{i\,\min}^{i\,\max}\sum_{j\,\min}^{j\,\max} f$
Product[f ,{i , imin , imax}]	Γινόμενο $\prod_{i\,\min}^{i\,\max} f$

Παραδείγματα :

```
In[8]:= Sum[i^2, {i, 1, n}]
```

$$\text{Out[8]=} \quad \frac{1}{6} n (1+n) (1+2n)$$

Εδώ υπολογίζεται το άθροισμα του i^2 με το i να αυξάνεται από 1 έως n.

```
In[9]:= Sum[1/(i! + (2 i)!), {i, 1, Infinity}]
```

$$\text{Out[9]=} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i! + (2\,i)!}$$

Αυτό το άθροισμα δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς χρησιμοποιώντας γνωστές μαθηματικές συναρτήσεις.

{imax}	Αυξάνει συνεχώς imax φορές , χωρίς αύξηση καμίας μεταβλητής
{i , imax}	Το i αυξάνεται από 1 έως imax με βήμα 1
{i , imin , imax}	Το i αυξάνεται από imin έως imax με βήμα 1
{i , imin , imax , di}	Το i αυξάνεται από imin έως imax με βήμα di
{I , imin , imax},{j , jmin , jmax}, ..	Το i αυξάνεται από imin σε imax και για κάθε τιμή του , το j αυξάνεται από jmin σε imax κτλ.

5.4.4 Εξισώσεις:

Στο Mathematica μπορούμε να ελέγξουμε αν x και y είναι ίσα και έτσι να αποφύγουμε ανεπιθύμητες ενέργειες. Για να γίνει αυτό:

x = = y

Βέβαια δεν πρέπει να μπερδεύουμε το x = y, με το οποίο θέτουμε το x ίσο με y. Έτσι:

x = y	Το x παίρνει την τιμή y
x = = y	Έλεγχος αν x και y είναι ίσα

```
In[1]:= x = 4

Out[1]= 4

In[2]:= x == 4

Out[2]= True

In[3]:= x == 6

Out[3]= False

In[4]:= 2 + 2 == 4

Out[4]= True
```

Ορισμένες σημαντικές εκφράσεις για τις εξισώσεις και τις ανισότητες στο Mathematica είναι οι εξής:

x = = y	x και y ίσα
x != y	x και y άνισα
x > y	x μεγαλύτερο του y
x >= y	x μεγαλύτερο ή ίσο του y
x < y	x μικρότερο του y
x <= y	x μικρότερο ή ίσο του y
x = = y = = z	όλα ίσα
x != y != z	όλα άνισα

```
In[5]:= 10 < 7

Out[5]= False

In[6]:= 3 != 2 != 5

Out[6]= True

In[7]:= 3 > 6 <= 4

Out[7]= False
```

5.4.5 Επίλυση εξισώσεων:

Μια έκφραση όπως x^2 + 2x – 7 = = 0 , x αντιπροσωπεύει μια εξίσωση στο Mathematica. Για την επίλυση τέτοιου είδους εξισώσεων, δηλαδή για να βρούμε για ποιες τιμές του χ ισχύει η παραπάνω εξίσωση, χρησιμοποιούμε τις εξής εκφράσεις:

Solve [lhs = = rhs , x]	Λύνει μια εξίσωση δίνοντας μια λίστα τιμών για το x
x /. solution	Χρησιμοποιεί τη λίστα τιμών για να βάλει τιμές στο x
expr /. solution	Χρησιμοποιεί τη λίστα τιμών για να βάλει τιμές σε μια οποιαδήποτε έκφραση του x

```
In[2]:= Solve[x^2 + 2 x - 7 == 0, x]

Out[2]= {{x → -1 - 2 √2}, {x → -1 + 2 √2}}

In[3]:= N[%]

Out[3]= {{x → -3.82843}, {x → 1.82843}}

In[4]:= x /. %

Out[4]= {-3.82843, 1.82843}

In[5]:= x^2 + 3 x /. %%

Out[5]= {3.17157, 8.82843}
```

Η εξίσωση αυτή είναι αληθής για δύο τιμές του x.

Ακριβείς αριθμητικές τιμές των δύο λύσεων

Μπορούμε να πάρουμε μια λίστα των ακριβών λύσεων για το x θέτοντας τις τιμές που βρέθηκαν από την επίλυση της εξίσωσης .

Η διαδικασία μπορεί να γίνει και για οποιαδήποτε άλλη έκφραση του

Το Solve πάντα προσπαθεί να δίνει σαφείς τύπους για τις λύσεις των εξισώσεων. Όμως, όπως είναι κατανοητό, για εξαιρετικά πολύπλοκες εξισώσεις, δεν είναι δυνατόν να δοθούν απόλυτα σαφείς αλγεβρικοί τύποι, όπως για παράδειγμα σε εξισώσεις που περιέχουν μια μεταβλητή σε δύναμη μεγαλύτερη από 5.

```
In[6]:= Solve[x^4 - 5 x^2 - 3 == 0, x]

Out[6]= {{x → -I Sqrt[1/2 (-5 + Sqrt[37])]}, {x → I Sqrt[1/2 (-5 + Sqrt[37])]},
         {x → -Sqrt[1/2 (5 + Sqrt[37])]}, {x → Sqrt[1/2 (5 + Sqrt[37])]}}

In[7]:= Solve[x^6 == 1, x]

Out[7]= {{x → -1}, {x → 1}, {x → -(-1)^(1/3)}, {x → (-1)^(1/3)},
         {x → -(-1)^(2/3)}, {x → (-1)^(2/3)}}

In[8]:= Solve[2 - 4 x + x^5 == 0, x]

Out[8]= {{x → Root[2 - 4 #1 + #1^5 &, 1]}, {x → Root[2 - 4 #1 + #1^5 &, 2]},
         {x → Root[2 - 4 #1 + #1^5 &, 3]}, {x → Root[2 - 4 #1 + #1^5 &, 4]},
         {x → Root[2 - 4 #1 + #1^5 &, 5]}}
```

Το Mathematica μπορεί εύκολα να λύνει εξισώσεις μα μία μεταβλητή όταν η υψηλότερη δύναμη είναι μικρότερη από 5.

Επίσης μπορεί να λύσει ορισμένες απλές εξισώσεις οι οποίες περιέχουν υψηλότερες δυνάμεις.

Σε αυτήν την περίπτωση που είναι δύσκολο να δοθούν σαφείς τύποι, το Mathematica χρησιμοποιεί την έκφραση Root για να δώσει τις ρίζες.

Εκτός από την ικανότητα του Mathematica να λύνει καθαρά αλγεβρικές εξισώσεις, μπορεί επίσης να λύσει εξισώσεις στις οποίες περιέχονται και κάποιες συναρτήσεις.

```
In[1]:= Solve[Sin[x] == a, x]

    Solve::ifun : Inverse functions are being used by
       Solve, so some solutions may not be found.

Out[1]= {{x → ArcSin[a]}}
```

Μια εξίσωση όπως η Sin(x) = a έχει στην πραγματικότητα ένα άπειρο αριθμό πιθανών λύσεων, πολλαπλάσια του 2π. Το Solve δίνει μία μόνο λύση, αλλά τυπώνει και ένα μήνυμα που ενημερώνει ότι υπάρχουν και άλλες λύσεις.

Το Solve μπορεί να χειριστεί και εξισώσεις στις οποίες περιέχονται συναρτήσεις της μορφής f(g(x)). Σε τέτοιες περιπτώσεις, επίσης τυπώνει ένα μήνυμα και δίνει τα αποτελέσματα σε μορφή αντίστροφων συναρτήσεων.

Παράδειγμα:

```
In[2]:= Solve[f[x^2] == a, x]

    InverseFunction::ifun : Warning: Inverse functions are
      being used. Values may be lost for multivalued inverses.

Out[2]= {{x → -√(f^(-1)[a])}, {x → √(f^(-1)[a])}}
```

Το Mathematica μπορεί επίσης να επιλύσει μια ομάδα ταυτόσημων εξισώσεων, αν καθορίσουμε τις μεταβλητές ως προς τις οποίες θέλουμε να τις επιλύσουμε.

Solve[{lhs_1 = = rhs_1 , lhs_2 = = rhs_2 , …}]	Επίλυση μιας ομάδας ταυτόσημων εξισώσεων για τα x και y

Παράδειγμα :

```
In[3]:= Solve[{ax^2 + 6 y == 0, 2 x + (1 - a)^2 y^2 == 1}, {x, y}]

Out[3]= {{x → 1/72 (36 - ax^4 + 2 a ax^4 - a^2 ax^4), y → -(ax^2/6)}}
```

Όταν δουλεύουμε με ομάδες εξισώσεων με διάφορες μεταβλητές, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις εξισώσεις εξαλείφοντας κάποιες από τις μεταβλητές.

```
In[4]:= Eliminate[{ax^2 + 6 y == 0, 2 x + (1 - a)^2 y^2 == 1}, y]

Out[4]= 72 x == 36 - ax^4 + 2 a ax^4 - a^2 ax^4
```

Εξαλείφεται το y από τις δύο εξισώσεις δίνοντας μια απλή εξίσωση για το x

Σε ομάδες εξισώσεων όπως οι παραπάνω , για τις περισσότερες τιμές του α οι εξισώσεις {x = = 1 , x = = a} δεν είναι αληθείς και έτσι δεν υπάρχουν πιθανές λύσεις για το x. Όμως αν το α είναι ίσο με 1, οι εξισώσεις έχουν λύση. Χρησιμοποιώντας την εντολή Reduce αντί Solve, το Mathematica θα δώσει τις λύσεις των εξισώσεων καθώς και τις τιμές του α για τις οποίες οι εξισώσεις είναι αληθείς.

```
In[5]:= Reduce[{x == 1, x == a}, x]

Out[5]= x == 1 && a == 1
```

Η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν το α είναι 1. Ο συμβολισμός x = = 1 && a = = 1 σημαίνει ότι πρέπει και το x και το α να είναι 1.

Για την επίλυση εξισώσεων, λοιπόν, χρησιμοποιούμε :

Solve [lhs = = rhs, x]	Λύνει μια εξίσωση του x
Solve[{lhs_1 = = rhs_1 , lhs_2 = = rhs_2 , …} , {x , y , …}]	Λύνει μια ομάδα ταυτόσημων συναρτήσεων για x , y …
Eliminate[{lhs_1 = = rhs_1 , lhs_2 = = rhs_2 , …},{x , …}]	Εξαλείφει το x σε μια ομάδα ταυτόσημων εξισώσεων

Reduce[{$lhs_1 == rhs_1$, $lhs_2 == rhs_2$,…},{x , y , …}]	Δίνει μια ομάδα απλουστευμένων εξισώσεων με όλες τις πιθανές λύσεις

5.4.6 Διαφορικές εξισώσεις:

Οι διαφορικές εξισώσεις, όπως $y''(x) + y'(x) = y(x)$ είναι εξισώσεις με συναρτήσεις. Στο Mathematica πρέπει πάντα να δίνουμε τους όρους των διαφορικών εξισώσεων σε μορφή συναρτήσεων, όπως y[x] και πρέπει να καθορίζουμε τις μεταβλητές από τις οποίες εξαρτώνται οι συναρτήσεις.

Το Mathematica μπορεί να λύνει τόσο γραμμικές όσο και μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις όπως και λίστες ταυτόσημων εξισώσεων. Αν δεν καθορίζονται αρχικές συνθήκες, οι λύσεις θα περιέχουν ένα αριθμό απροσδιόριστων συντελεστών, όπως c[1] , c[2] κτλ.

Οι εντολές για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι:

Dsolve [eqns , y[x] , x]	Λύνει μια διαφορική εξίσωση ως προς y[x], θεωρώντας το x σαν ανεξάρτητη μεταβλητή.
Dsolve [eqns , y , x]	Δίνει μία λύση για το y σε απλή μορφή.

Παραδείγματα :

```
In[1]:= DSolve[y'[x] == a y[x] + 1, y[x], x]

Out[1]= {{y[x] → -1/a + E^(a x) C[1]}}

In[2]:= DSolve[{y'[x] == a y[x] + 1, y[0] == 0}, y[x], x]

Out[2]= {{y[x] → (-1 + E^(a x))/a}}

In[3]:= DSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == x[t]}, {x[t], y[t]}, t]

Out[3]= {{x[t] → -E^-t C[1] + E^t C[2], y[t] → E^-t C[1] + E^t C[2]}}

In[4]:= DSolve[y'[x] == x + y[x], y, x]

Out[4]= {{y → (-1 + E^#1 C[1] - #1 &)}}
```

Δίνει τη λύση της διαφορικής $y'(x)=a\,y(x) + 1$. Το c[1] είναι μία σταθερά που καθορίζεται από αρχικές συνθήκες.

Εδώ οι αρχικές συνθήκες καθορίζονται, οπότε δεν υπάρχουν απροσδιόριστοι συντελεστές.

Εδώ έχουμε δύο ταυτόσημες διαφορικές εξισώσεις χωρίς αρχικές συνθήκες, για αυτό στις λύσεις για τα x[t] και y[t] περιέχονται δύο σταθερές.

5.4.7 Όρια:

Για να υπολογίσουμε στο Mathematica το όριο μιας συνάρτησης χρησιμοποιούμε την εξής έκφραση:

Limit [expr , $x \to x_0$]	Όριο της συνάρτησης expr του x τείνοντος στο x_0

Ορισμένα παραδείγματα είναι τα εξής:

```
In[1]:= Limit[5 / x, x → 0]
Out[1]= ∞
In[2]:= Limit[5 x^2 / 6 x, x → 0]
Out[2]= 0
In[4]:= Limit[Sin[x] / x, x → 0]
Out[4]= 1
In[6]:= Limit[Cos[x] + 2, x → 1]
Out[6]= 2 + Cos[1]
```

5.5 Αριθμητικά Μαθηματικά.

Σε περιπτώσεις τα αποτελέσματα κάποιων πράξεων δεν μπορούν να εκφραστούν σε συμβολική μορφή, οπότε πρέπει να πάρουμε ακριβή νούμερα.

N[expr]	Αριθμητική τιμή της έκφρασης expr
Nintegrate[f ,{x , xmin , xmax}]	Αριθμητική προσέγγιση του ορίου $\int_{x\min}^{x\max} f$
NSum[f ,{I , imin , Infinity}]	Αριθμητική προσέγγιση του αθροίσματος $\sum_{i\min}^{\infty} f$
NSolve[lhs = = rhs , x]	Αριθμητική προσέγγιση των λύσεων μιας πολυωνυμικής συνάρτησης
FindRoot [lhs = = rhs ,{x , x_0}]	Ψάχνει για αριθμητική λύση μιας εξίσωσης ξεκινώντας από την τιμή x_0
FindMinimum [f ,{x , x_0}]	Ψάχνει την ελάχιστη τιμή της f ξεκινώντας από την τιμή x_0

Παραδείγματα:

```
In[7]:= (3 + Sqrt[2]) ^ 3
Out[7]= (3 + √2)^3
In[8]:= Expand[%]
Out[8]= 45 + 29 √2
In[9]:= N[%]
Out[9]= 86.0122
```

Το N[expr] δίνει ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα .

Ορισμένες εντολές, όπως Integrate προσπαθούν να δώσουν ακριβή αποτελέσματα στους υπολογισμούς. Όταν όμως αυτό δεν είναι εφικτό, δε γίνεται ο υπολογισμός. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να πάρουμε ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας το N.

```
In[10]:= Integrate[Sin[Sin[x]], {x, 1, 2}]
Out[10]= ∫_1^2 Sin[Sin[x]] dx
In[11]:= N[%]
Out[11]= 0.81645
In[12]:= NIntegrate[Sin[Sin[x]], {x, 1, 2}]
Out[12]= 0.81645
```

Έτσι παίρνουμε ένα προσεγγιστικό αποτέλεσμα του παραπάνω ολοκληρώματος.

Η παραπάνω διαδικασία συνοψίζεται σε μία μόνο εντολή.

Δεν υπάρχει σαφής τύπος για αυτό το ολοκλήρωμα, και έτσι το Mathematica δεν κάνει τον υπολογισμό.

Για να πάρουμε αριθμητικά αποτελέσματα από την επίλυση εξισώσεων, χρησιμοποιούμε τις εξής εντολές:

NSolve[lhs = = rhs , x]	Δίνει αριθμητική τιμή της λύσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης
NSolve[{lhs_1 = = rhs_1 , lhs_2 = = rhs_2 , …},{x , y , ..}]	Λύνει σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων αριθμητικά
FindRoot[lhs = = rhs ,{x , x_0}]	Ψάχνει για την αριθμητική τιμή μιας εξίσωσης ξεκινώντας από την τιμή x_0
FindRoot[{lhs_1 = = rhs_1 , lhs_2 = = rhs_2 , …},{x , x_0},{y , y_0}]	Ψάχνει για τις αριθμητικές λύσεις ταυτόσημων εξισώσεων ξεκινώντας από

	τις τιμές x_0 , y_0 κτλ

Για τις διαφορικές εξισώσεις:

NDSolve[eqns , y ,{x , xmin , xmax}]	Δίνει την αριθμητική λύση της εξίσωσης ως προς y , με την ανεξάρτητη μεταβλητή x να κυμαίνεται από xmin έως xmax
NDSolve[eqns ,{y_1 , y_2 , …},{x , xmin , xmax}]	Λύνει ένα σύστημα εξισώσεων για το y_i

Παραδείγματα:

```
In[1]:= Solve[x^5 + x + 1 == 0, x]
```

$$\text{Out[1]= } \left\{\{x \to -(-1)^{1/3}\},\ \{x \to (-1)^{2/3}\},\ \left\{x \to \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{25 - 3\sqrt{69}}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(25 - 3\sqrt{69}\right)\right)^{1/3}\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(1 + I\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(25 - 3\sqrt{69}\right)\right)^{1/3} + \frac{1 - I\sqrt{3}}{3\,2^{2/3}\left(25 - 3\sqrt{69}\right)^{1/3}}\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(1 - I\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(25 - 3\sqrt{69}\right)\right)^{1/3} + \frac{1 + I\sqrt{3}}{3\,2^{2/3}\left(25 - 3\sqrt{69}\right)^{1/3}}\right\}\right\}$$

```
In[2]:= NSolve[x^5 + x + 1 == 0, x]

Out[2]= {{x → -0.754878}, {x → -0.5 - 0.866025 I},
         {x → -0.5 + 0.866025 I}, {x → 0.877439 - 0.744862 I},
         {x → 0.877439 + 0.744862 I}}

In[3]:= NSolve[{x + y == 2, x - 3 y + z == 3, x - y + z == 0}, {x, y, z}]

Out[3]= {{x → 3.5, y → -1.5, z → -5.}}
```

Είναι φανερή η διαφορά μεταξύ του Solve και του NSolve. Χρησιμοποιώντας NSolve, τα αποτελέσματα είναι αριθμητικά, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, για την έκφραση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούνται και μαθηματικά σύμβολα ($\sqrt{}$, κλάσματα κτλ)

Στις περιπτώσεις που οι εξισώσεις περιέχουν μόνο γραμμικές συναρτήσεις ή πολυώνυμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή NSolve για να πάρουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα των λύσεων. Όταν όμως οι εξισώσεις περιέχουν πολυπλοκότερες συναρτήσεις δεν υπάρχει μια συστηματική διαδικασία στην επίλυσή τους. Έτσι χρησιμοποιούμε την εντολή FindRoot η οποία ψάχνει για λύσεις, ξεκινώντας από την τιμή που εμείς καθορίζουμε.

```
In[1]:= FindRoot[3 Cos[x] == Log[x], {x, 1}]

Out[1]= {x → 1.44726}

In[2]:= FindRoot[3 Cos[x] == Log[x], {x, 10}]

Out[2]= {x → 13.1064}
```

5.6 Συναρτήσεις και προγράμματα.

5.6.1 Καθορισμός συναρτήσεων:

Έως αυτό το σημείο έχουμε συναντήσει αρκετά παραδείγματα συναρτήσεων που ήδη υπάρχουν στο Mathematica. Έχουμε όμως τη δυνατότητα με αυτό το πρόγραμμα να εισάγουμε τις δικές μας συναρτήσεις.

Σαν πρώτο παράδειγμα υποθέτουμε ότι θέλουμε να προσθέσουμε μια συνάρτηση $f(x) = x^2$. Η εντολή για να γίνει αυτό είναι: f [x_] : = x ^2 . Η παύλα (_) έχει την έννοια του κενού.

f [x _]: = x ^2	Καθορισμός της συνάρτησης f
?f	Δείχνει τον ορισμό της f
Clear[f]	Καθαρίζει όλους τους ορισμούς για την f

```
In[1]:= f[x_] := x^2

In[2]:= f[a + 1]
Out[2]= (1 + a)^2

In[3]:= f[4]
Out[3]= 16

In[4]:= f[3 x + x^2]
Out[4]= (3 x + x^2)^2

In[5]:= Expand[f[(x + 1 + y)]]
Out[5]= 1 + 2 x + x^2 + 2 y + 2 x y + y^2

In[6]:= ? f
      Global`f
      f[x_] := x^2
```

Καθορίζουμε τη συνάρτηση:

$f(x) = x^2$

Η συνάρτηση αυτή υψώνει το όρισμά της στο τετράγωνο.

Το όρισμα μπορεί επίσης να είναι ένας αριθμός.

Μπορεί όμως να είναι και μια πιο πολύπλοκη έκφραση.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την f για ένα υπολογισμό.

Αυτό δείχνει τον ορισμό που δώσαμε για την f.

Τα ονόματα που χρησιμοποιούμε για τις συναρτήσεις στο Mathematica, όπως f, είναι μόνο σύμβολα. Έτσι, πρέπει να αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε ονόματα που αρχίζουν με κεφαλαία γράμματα για να εμποδίσουμε τη σύγχυση με τις ήδη υπάρχουσες συναρτήσεις του Mathematica.

```
In[7]:= hump[x_, xmax_] := (x - xmax)^2 / xmax

In[8]:= 2 + hump[x, 3.5]
Out[8]= 2 + 0.285714 (-3.5 + x)^2

In[9]:= hump[x_, xmax_] := (x - xmax)^4

In[10]:= ? hump
      Global`hump
      hump[x_, xmax_] := (x - xmax)^4

In[11]:= Clear[hump]
```

Οι συναρτήσεις στο Mathematica μπορούν να έχουν οποιοδήποτε αριθμό ορισμάτων.
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση hump σε οποιοδήποτε υπολογισμό. Εδώ δίνεται ένας νέος ορισμός για τη hump που διαγράφει τον προηγούμενο.
Σε αυτή την ερώτηση θα εμφανιστεί ο νέος ορισμός.

Αυτή η εντολή διαγράφει όλους τους ορισμούς της hump.

Όταν έχουμε τελειώσει με μια συγκεκριμένη συνάρτηση, είναι καλό να διαγράφουμε όλους τους ορισμούς που έχουμε δώσει σε αυτή, ώστε να μην υπάρξει πρόβλημα αν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε σε άλλη περίπτωση το ίδιο όνομα ή σύμβολο.

5.6.2 Επαναλαμβανόμενες λειτουργίες:

Υπάρχουν περιπτώσεις που απαιτείται επανάληψη της ίδιας λειτουργίας πολλές φορές. Ένας εύκολος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την εντολή Do του Mathematica.

Do[expr ,{i , imax}]	Δίνει την τιμή της έκφρασης expr με το i να κυμαίνεται από 1 έως imax
Do[expr ,{i , imin , imax , di}]	Δίνει την τιμή της έκφρασης expr με το i να κυμαίνεται από imin έως imax με βήμα di .
Print[expr]	Τυπώνει την έκφραση expr
Table[expr ,{i , imax}]	Φτιάχνει μια λίστα τιμών για την έκφραση expr με το i να κυμαίνεται από 1 έως imax

Παραδείγματα :

```
In[12]:= Do[Print[i!], {i, 5}]
1
2
6
24
120
In[13]:= Table[i!, {i, 5}]
Out[13]= {1, 2, 6, 24, 120}
In[14]:= r = 1; Do[r = 1/(1+r), {100}]; r
Out[14]= 573147844013817084101/927372692193078999176
```

Τυπώνει τις τιμές των πρώτων 5 παραγοντικών.

Είναι συχνά χρήσιμο να έχουμε στη διάθεσή μας μια λίστα αποτελεσμάτων τα οποία μπορούμε στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε.

Αν δε δώσουμε μεταβλητή επανάληψης, το Mathematica απλά επαναλαμβάνει τη

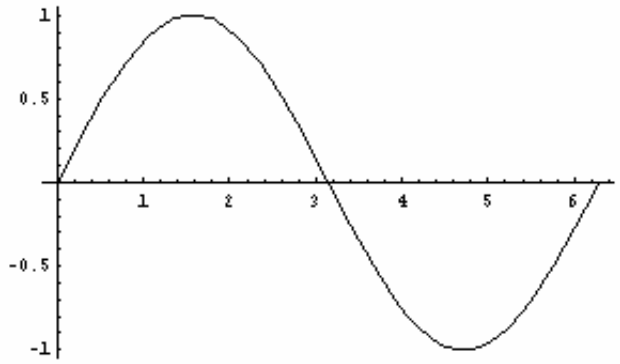
λειτουργία που έχουμε καθορίσει χωρίς να αλλάξει τίποτα.

5.7 Γραφικά και ήχος.

5.7.1 Βασικά γραφήματα:

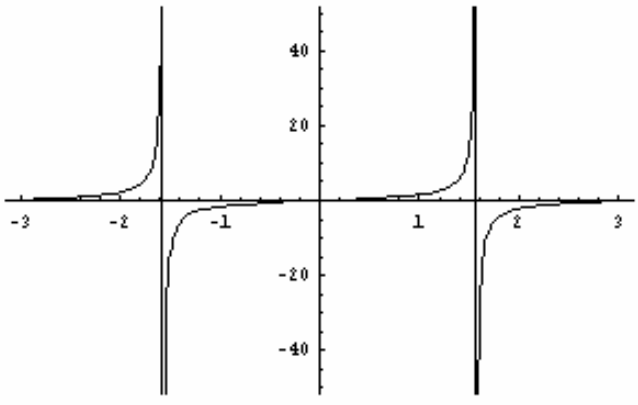
Plot[f ,{x , xmin , xmax}]	Δημιουργεί το γράφημα της συνάρτησης f του x από την τιμή xmin έως xmax
Plot[{f_1 , f_2 , ….},{x , xmin , xmax}]	Δίνει τα γραφήματα διαφόρων συναρτήσεων μαζί

```
In[1]:= Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}]
```



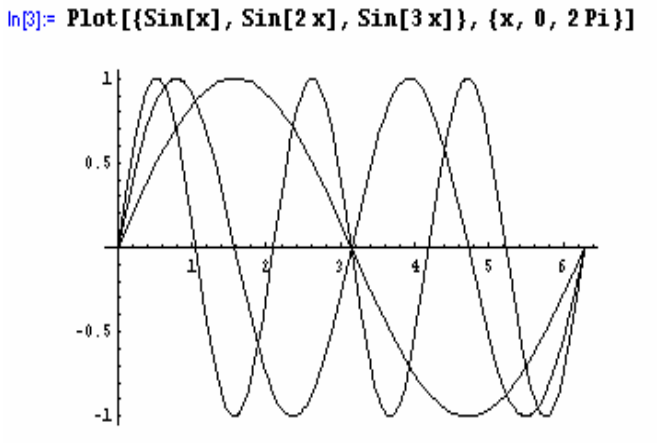
Γράφημα της συνάρτησης sin(x) με το x να κυμαίνεται από 0 έως 2Pi .

```
In[2]:= Plot[Tan[x], {x, -3, 3}]
```



Μπορούμε να δημιουργήσουμε γραφήματα ακόμα και ιδιόμορφων συναρτήσεων. Το Mathematica θα επιλέξει τις κατάλληλες κλίμακες.

```
In[3]:= Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[3 x]}, {x, 0, 2 Pi}]
```



Μπορούμε να σχεδιάσουμε τα γραφήματα πολλών διαφορετικών συναρτήσεων στους ίδιους άξονες.

Για να σχεδιαστεί ένα γράφημα, το Mathematica υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης για ένα μεγάλο αριθμό σημείων, ώστε το γράφημα να είναι ομαλό. Έτσι, πρέπει να θέτουμε τις συναρτήσεις με τέτοιο τρόπο ώστε ο υπολογισμός τους να είναι όσο το δυνατόν γρηγορότερος.

Όταν ζητάμε από το Mathematica να σχεδιάσει το γράφημα μιας συνάρτησης, πχ f(x), υπάρχουν δύο πιθανές διαδικασίες που μπορεί να ακολουθήσει. Η μία από αυτές είναι να προσπαθήσει να εκτιμήσει την f, πιθανώς δίνοντάς της μια συμβολική έκφραση σε σχέση με το x και στη συνέχεια να υπολογίσει αριθμητικά τις τιμές αυτής της έκφρασης για τις συγκεκριμένες τιμές του x που είναι απαραίτητες για το γράφημα. Η δεύτερη διαδικασία είναι πρώτα να αποφασίσει ποιες τιμές του x είναι απαραίτητες και στη συνέχεια να υπολογίσει τις τιμές της f για εκείνες τις τιμές του x.

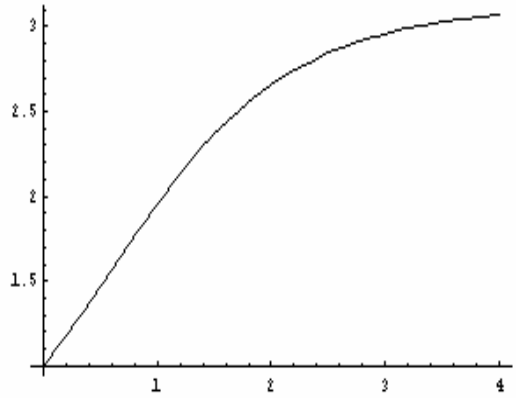
Αν ζητήσουμε το γράφημα Plot [f ,{x , xmin , xmax}], θα χρησιμοποιηθεί η δεύτερη μέθοδος. Αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι το Mathematica προσπαθεί απλά να υπολογίσει τις τιμές της f για συγκεκριμένες τιμές του x.

Υπάρχουν εντούτοις περιπτώσεις στις οποίες είναι προτιμότερο το Mathematica να υπολογίζει την f πριν ξεκινήσει να κάνει το γράφημα. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν η f είναι μια εντολή η οποία δημιουργεί έναν πίνακα συναρτήσεων. Πρέπει το Mathematica πρώτα να παράγει τον πίνακα και στη συνέχεια να υπολογίσει τις συναρτήσεις παρά να προσπαθήσει να παράγει τον πίνακα εκ νέου για κάθε τιμή του x. Αυτό μπορεί να γίνει με την εντολή Plot [Evaluate[f] ,{x , xmin , xmax}] .

```
In[2]:= NDSolve[{y'[x] == Sin[y[x]], y[0] == 1}, y, {x, 0, 4}]

Out[2]= {{y → InterpolatingFunction[{{0., 4.}}, <>]}}

In[3]:= Plot[Evaluate[y[x] /. %], {x, 0, 4}]
```



Δίνει το γράφημα των συναρτήσεων Bessel $J_n(x)$ με το x να κυμαίνεται από 1 έως 4. Η εντολή Evaluate λέει στο Mathematica πρώτα να φτιάξει τον πίνακα των συναρτήσεων και μετά να υπολογίσει τις τιμές τους για τις συγκεκριμένες τιμές του x

Δίνει τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'(x) = \sin(y(x))$

Εδώ είναι το διάγραμμα της παραπάνω λύσης.

Plot[f ,{x , xmin , xmax}]	Πρώτα επιλέγει συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές για το x και μετά υπολογίζει τις τιμές της f για κάθε x
Plot[Evaluate[f] ,{x , xmin , xmax}]	Πρώτα υπολογίζει την f και μετά επιλέγει συγκεκριμένες τιμές του x
Plot[Evaluate[y[x]/.solution],{x , xmin , xmax}]	Δίνει το γράφημα μιας αριθμητικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης που λύνεται με το NDSolve

Οι λεπτομέρειες του πώς το Mathematica βγάζει στις εξόδους του τα διάφορα γραφήματα, ποικίλουν από υπολογιστή σε υπολογιστή και ανάλογα με τη σύνδεση του Mathematica.

Σε ορισμένες περιπτώσεις το κάθε γράφημα καλύπτει όλη την οθόνη ή δημιουργείται ένα νέο παράθυρο στο οποίο εμφανίζεται στη συνέχεια το γράφημα. Σε άλλες περιπτώσεις, το κάθε γράφημα τοποθετείται σε ένα κελί στη σελίδα του Mathematica. Το Mathematica μας δίνει τη δυνατότητα να επεξεργαστούμε τα γραφήματα με διάφορους τρόπους, προκειμένου να τα φέρουμε στη μορφή που επιθυμούμε, πχ αλλάζοντας το μέγεθός τους.

Για να παραχθεί ένα οποιοδήποτε γράφημα από το Mathematica περνάει από 3 στάδια. Το πρώτο στάδιο είναι η εκτέλεση των εντολών, όπως Plot, ώστε να παραχθεί μια ακολουθία αρχικών συνθηκών από το Mathematica. Αυτές οι αρχικές συνθήκες αντιπροσωπεύουν γραμμές, σημεία, πολύγωνα κτλ, σαν εκφράσεις του Mathematica. Στο δεύτερο στάδιο γίνεται η αναπαράσταση αυτών των προδιαγραφών από εικόνες, σύμφωνα με κάποια πρότυπα τα οποία υπάρχουν στο Mathematica. Η αναπαραγωγή αυτή γίνεται με μια γλώσσα περιγραφής εικόνων

(PostScript). Στο τελευταίο στάδιο γίνεται η εισαγωγή της περιγραφικής μεθόδου PostScript ενός γραφήματος στην κατάλληλη διάταξη που επιθυμούμε.

Η σημασία της χρήσης της PostScript σαν γλώσσα περιγραφής γραφημάτων είναι ότι μπορεί να αποδοθεί σε διάφορα είδη διατάξεων, συμπεριλαμβανομένων οθονών και εκτυπωτών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλά είδη προγραμμάτων. Έτσι, με την εντολή PSPrint [graphics] τυπώνεται ένα γράφημα, ενώ η εντολή Display [“file” graphics,”EPS”] αποθηκεύει την αναπαράσταση ενός γραφήματος από την PostScript σε ένα αρχείο.

Όταν το Mathematica καλείται να δημιουργήσει ένα γράφημα, πρέπει να κάνει πολλές επιλογές. Πρέπει να επιλέξει τις κλίμακες, πού να δειγματοληπτηθούν οι συναρτήσεις, πώς να χαραχθούν οι άξονες κτλ. Τις περισσότερες φορές οι επιλογές που κάνει το Mathematica είναι καλές. Εντούτοις αν θέλουμε το καλύτερο αποτέλεσμα, πρέπει να βοηθήσουμε το Mathematica σε αυτές τις επιλογές.

Υπάρχει ένας γενικός μηχανισμός για τον καθορισμό των επιλογών για τις διάφορες λειτουργίες του Mathematica. Κάθε επιλογή έχει ένα συγκεκριμένο όνομα. Σαν τελευταία ορίσματα της εντολής Plot, μπορούμε να συμπεριλάβουμε μια ακολουθία μέτρων της μορφής όνομα $\rightarrow$τιμή, για να καθορίσουμε τις τιμές των διαφόρων επιλογών. Αν για οποιαδήποτε επιλογή δε δώσουμε ακριβές μέτρο, αυτή θεωρείται ότι έχει την προκαθορισμένη από το σύστημα τιμή (default).

Plot [f ,{x , xmin , xmax}, option $\rightarrow$ value]	Δημιουργεί ένα γράφημα καθορίζοντας μια συγκεκριμένη τιμή για μια επιλογή.

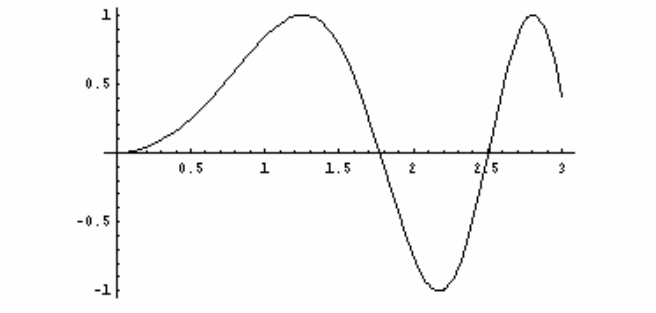
Μια εντολή όπως η Plot έχει πολλές επιλογές τις οποίες μπορούμε να καθορίσουμε. Αν θέλουμε να βελτιώσουμε ένα γράφημα, πρέπει να πειραματιστούμε προσπαθώντας να θέσουμε τις καλύτερες επιλογές.

Μερικές από τις επιλογές που υπάρχουν για την εντολή Plot είναι οι εξής:
(Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την εντολή Show)

Όνομα επιλογής	**Προκαθορισμένη τιμή**	
AspectRatio	1/GoldenRatio	Λόγος ύψους προς πλάτος για το γράφημα. Η επιλογή Automatic θέτει το λόγο από τις συντεταγμένες των

		απόλυτων τιμών των x και y.
Axes	Automatic	Αν υπάρχουν άξονες.
AxesLabel	None	Ονόματα για τους άξονες. {xlabel, ylabel} για τους άξονες x και y αντίστοιχα.
AxesOrigin	Automatic	Το σημείο τομής των αξόνων.
TextStyle	$TextStyle	Η προκαθορισμένη μορφή του κειμένου που θα υπάρχει στο γράφημα.
FormatType	StandardForm	Ο τύπος του κειμένου στο γράφημα.
DisplayFunction	$DisplayFunction	Πώς εμφανίζονται τα γραφήματα στην οθόνη. Με την επιλογή Identity το γράφημα δεν παρουσιάζεται.
Frame	False	Αν θα υπάρχει πλαίσιο γύρω από το γράφημα .
FrameLabel	None	Ονόματα που θέλουμε να τοποθετηθούν γύρω από το πλαίσιο. Δίνουμε μια λίστα με τα ονόματα ξεκινώντας από τον άξονα x.
FrameTicks	Automatic	Τι σημάδια θέλουμε να υπάρχουν στο πλαίσιο αν αυτό υπάρχει. Με την εντολή None δε θα υπάρχουν σημάδια.
GridLines	None	Τι γραμμές πλέγματος να υπάρχουν.
PlotLabel	None	Τίτλος για το γράφημα.
PlotRange	Automatic	Το εύρος των συντεταγμένων που θέλουμε να υπάρχουν στο γράφημα. Η επιλογή All περιέχει όλα τα σημεία.
Ticks	Automatic	Τι στίγματα να υπάρχουν στους άξονες αν αυτοί υπάρχουν.

```
In[1]:= Plot[Sin[x^2], {x, 0, 3}]
```

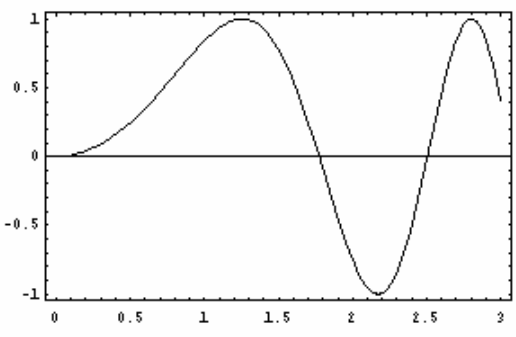


προκαθορισμένες τιμές τους.

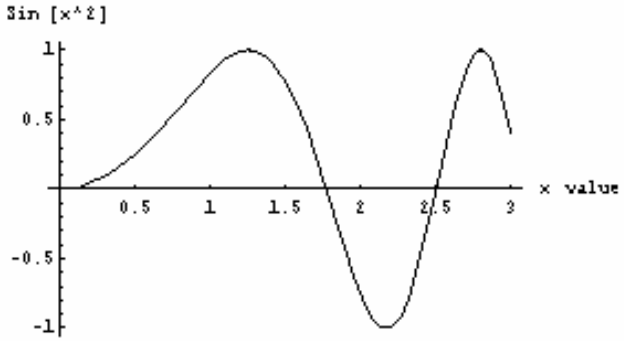
Εδώ υπάρχει ένα πλαίσιο γύρω από τους άξονες .

Σε αυτό το γράφημα όλες οι επιλογές έχουν τις

```
In[2]:= Plot[Sin[x^2], {x, 0, 3}, Frame → True]
```

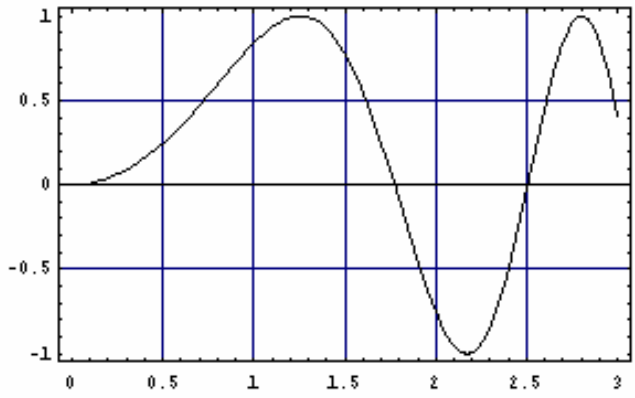


```
In[3]:= Plot[Sin[x^2], {x, 0, 3}, AxesLabel → {"x value", "Sin[x^2]"}]
```



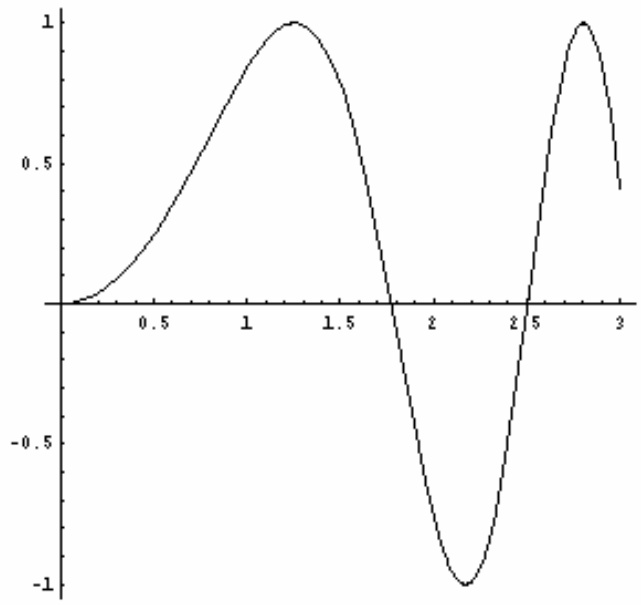
Εδώ καθορίζονται ονόματα για τους άξονες x και y. Τα ονόματα που εμφανίζονται στους άξονες είναι ίδια ακριβώς με αυτά που ορίσαμε μέσα στα εισαγωγικά. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δώσουμε οποιοδήποτε κείμενο αν το τοποθετήσουμε εντός εισαγωγικών.

```
In[4]:= Plot[Sin[x^2], {x, 0, 3}, Frame → True, GridLines → Automatic]
```



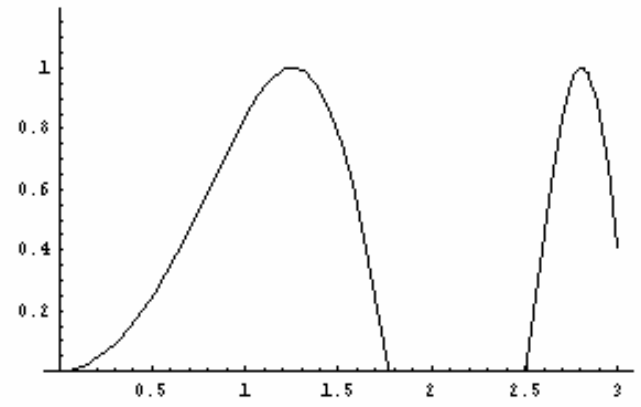
Μπορούμε να δώσουμε διάφορες επιλογές ταυτόχρονα, με οποιαδήποτε σειρά.

```
In[5]:= Plot[Sin[x^2], {x, 0, 3}, AspectRatio → 1]
```

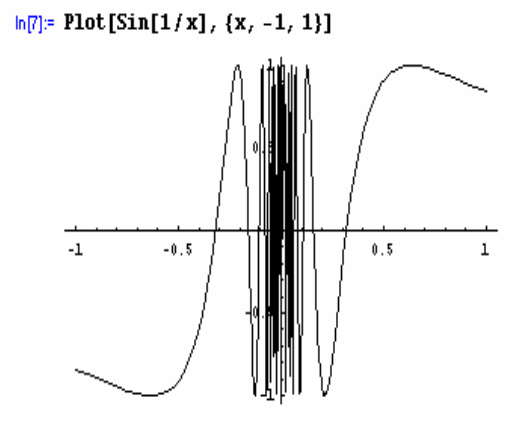


Αλλάζοντας το λόγο ύψους προς πλάτος αλλάζει και το όλο σχήμα του γραφήματος.

```
In[6]:= Plot[Sin[x^2], {x, 0, 3}, PlotRange → {0, 1.2}]
```



Εδώ καθορίζονται τα ακριβή όρια του y. Καθορίζοντας λοιπόν τα όρια του y, σε αυτό το γράφημα, κόβεται το κάτω μέρος της καμπύλης.



Η συνάρτηση $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Τείνει προς το άπειρο όταν το $x \cong 0$. Το Mathematica προσπαθεί να απεικονίσει περισσότερα σημεία στην περιοχή που η συνάρτηση δεν μπορεί να προσδιοριστεί. Δεν είναι όμως πάντα εφικτό να παραχθεί η συνάρτηση ακριβώς.

Εξαιτίας του ότι το Mathematica μπορεί να πάρει περιορισμένο αριθμό δειγμάτων, είναι πιθανό να χαθούν κάποια σημεία της συνάρτησης. Αυξάνοντας τα PlotPoints, το Mathematica θα δειγματίσει τη συνάρτηση σε περισσότερα σημεία. Βέβαια όσο περισσότερα PlotPoints θέτουμε, τόσο περισσότερο χρόνο χρειάζεται το Mathematica για να παράγει το γράφημα της συνάρτησης.

Επειδή με την εντολή Plot γίνονται πολλαπλές εκτιμήσεις της συνάρτησης πρέπει η κάθε εκτίμηση να είναι όσο το δυνατό ταχύτερη. Έτσι, το Mathematica μετατρέπει τη συνάρτηση σε ένα ψευδοκώδικα που μπορεί να εκτελεστεί αποτελεσματικά. Ένα πρόβλημα που μπορεί να εμφανιστεί σε αυτή την περίπτωση είναι ότι ο ψευδοκώδικας επιτρέπει μόνο μέσης ακρίβειας αριθμητικούς υπολογισμούς και αν η συνάρτηση απαιτεί μεγαλύτερη ακρίβεια, πρέπει να καταργήσουμε αυτή τη μετατροπή. Αυτό γίνεται με την επιλογή Compile $\rightarrow$ False.

Παρακάτω φαίνονται ακόμα μερικές επιλογές της εντολής Plot, οι οποίες όμως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εντολή Show.

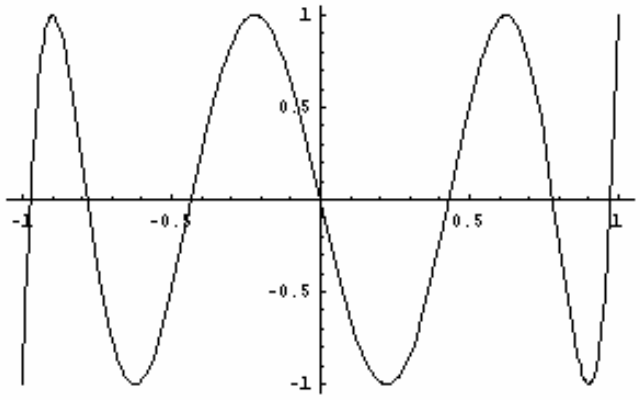
Όνομα επιλογής	**Προκαθορισμένη τιμή**	
PlotStyle	Automatic	Μια λίστα από αρχικές τιμές για την κάθε καμπύλη
PlotPoints	25	Καθορίζει τον ελάχιστο αριθμό σημείων στα οποία θέλουμε να δειγματίσουμε τη συνάρτηση
MaxBend	10.	Καθορίζει τη μέγιστη γωνία μεταξύ δύο τμημάτων της καμπύλης
PlotDivision	20.	Καθορίζει το μέγιστο παράγοντα υποδιαίρεσης κατά τη δειγματοληψία της συνάρτησης
Compiled	True	Αν επιθυμούμε μετατροπή της συνάρτησης της οποίας θέλουμε το γράφημα

5.7.2 Ανασχεδιασμός και σύνθεση γραφημάτων.

Το Mathematica σώζει τις πληροφορίες των γραφημάτων που παράγουμε έτσι ώστε αργότερα να τα ξανασχεδιάσουμε, αλλάζοντας κάποιες επιλογές που είχαμε κάνει.

Show [plot]	Ξανασχεδιάζει ένα γράφημα .
Show [plot , option → value]	Ξανασχεδιάζει ένα γράφημα με αλλαγμένες κάποιες μεταβλητές .
Show [$plot_1$, $plot_2$, …]	Γίνεται συνδυασμός διαφόρων γραφημάτων.
Show [GraphicsArray[{{$plot_1$, $plot_2$,…}, …}]]	Σχεδιάζει κάποια γραφήματα παραταγμένα.
ImputForm[plot]	Δείχνει τις πληροφορίες που έχουν σωθεί από το Mathematica για ένα γράφημα.

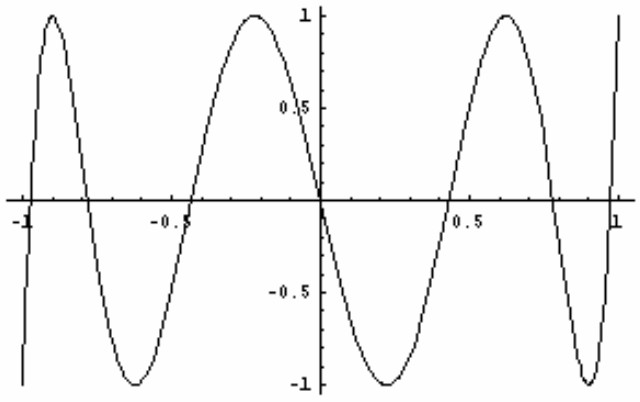
```
In[2]:= Plot[ChebyshevT[7, x], {x, -1, 1}]
```




```
Out[2]= - Graphics -
```

Εδώ βλέπουμε ένα απλό γράφημα.

```
In[3]:= Show[%]
```

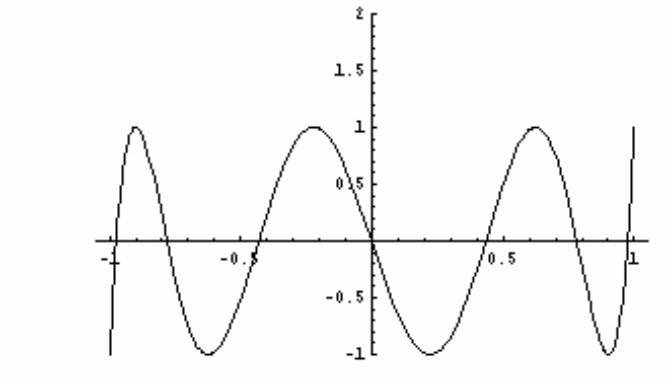



```
Out[3]= - Graphics -
```

Εδώ ξανατυπώνεται το γράφημα

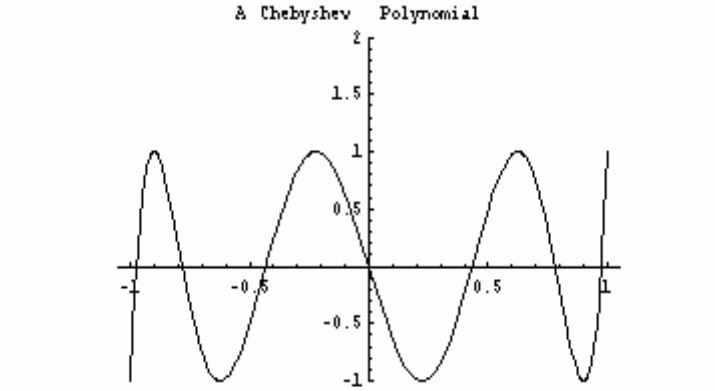
σύμφωνα με την προηγούμενη εντολή.

```
In[4]:= Show[%, PlotRange → {-1, 2}]
```



Στον ανασχεδιασμό του γραφήματος μπορούμε να αλλάξουμε μερικές επιλογές. Εδώ αλλάζουμε την κλίμακα του άξονα y.

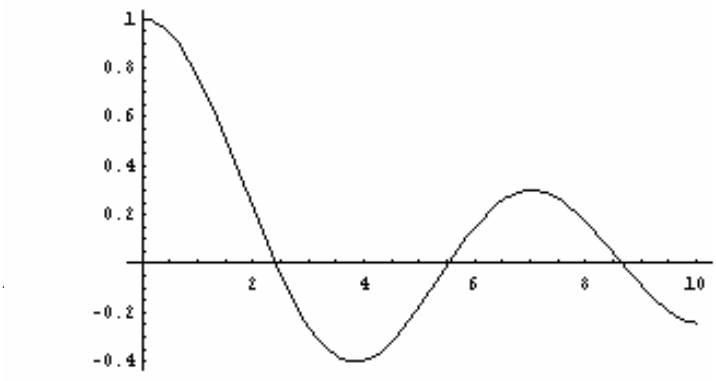
```
In[5]:= Show[%, PlotLabel → "A Chebyshev Polynomial"]
```



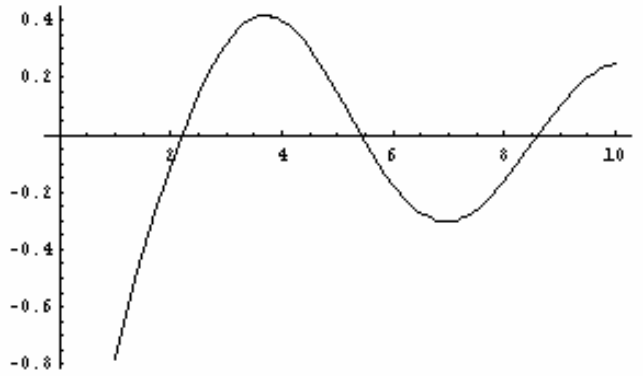
Στο γράφημα που παίρνουμε από την προηγούμενη εντολή, προσθέτουμε μια ακόμα επιλογή: ονομασία του γραφήματος.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την εντολή Plot για να έχουμε το συνδυασμό κάποιων γραφημάτων . Δεν έχει σημασία αν τα γραφήματα έχουν τις ίδιες κλίμακες. Το Mathematica θα επιλέγει πάντα τις σωστές κλίμακες ώστε να συμπεριλαμβάνονται όλα τα σημεία όλων των γραφημάτων.

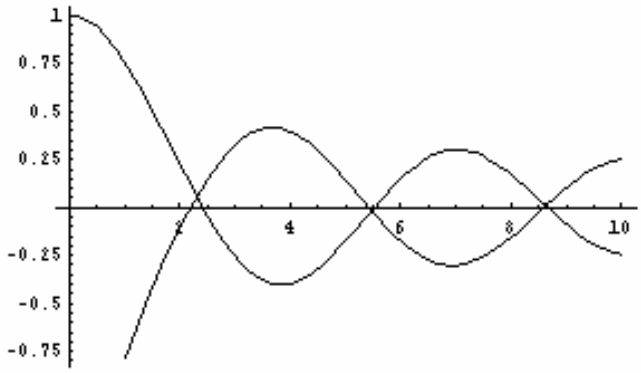
```
In[1]:= gj0 = Plot[BesselJ[0, x], {x, 0, 10}]
```



```
In[2]:= gy1 = Plot[BesselY[1, x], {x, 1, 10}]
```



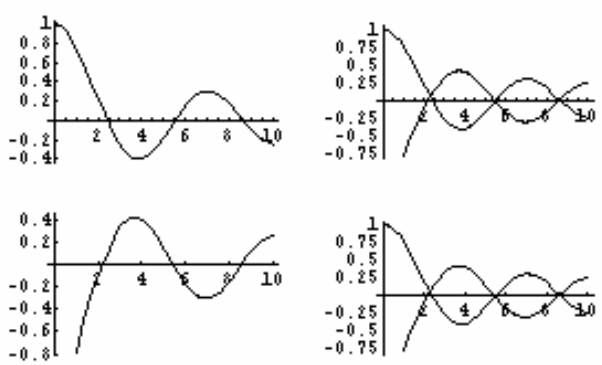
```
In[3]:= gjy = Show[gj0, gy1]
```



Βλέπουμε τη σύνθεση των δύο προηγούμενων γραφημάτων σε ένα. Όπως φαίνεται, η κλίμακα έχει προσαρμοστεί κατάλληλα.

Χρησιμοποιώντας την εντολή Show [$plot_1$, $plot_2$, …] μπορούμε να συνθέσουμε διάφορα γραφήματα σε ένα . Η εντολή GraphicsArray μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε διάφορα γραφήματα παραταγμένα .

```
In[4]:= Show[GraphicsArray[{{gj0, gjy}, {gy1, gjy}}]]
```

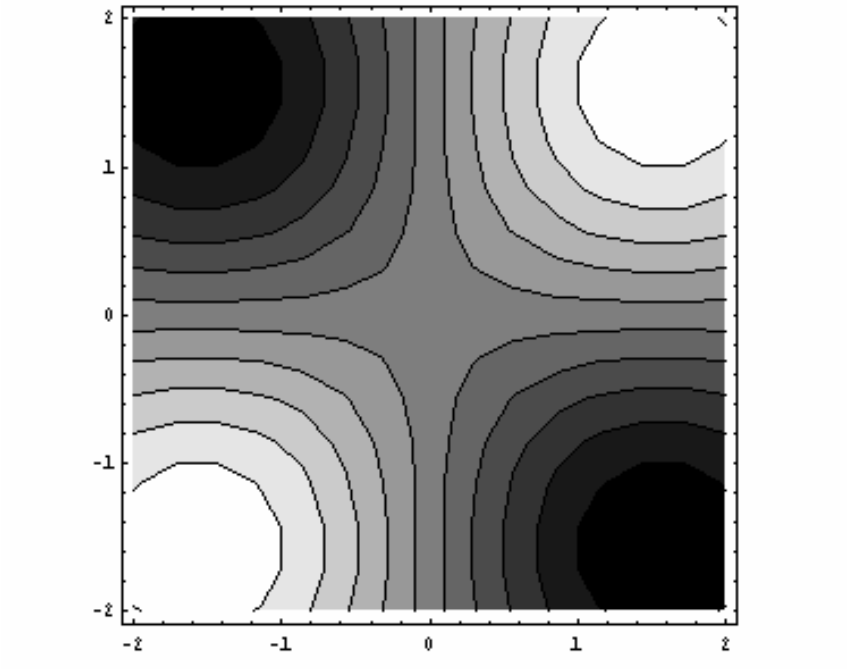


Βλέπουμε τα παραπάνω γραφήματα παραταγμένα .

5.7.3 Γραφήματα περιγραμμάτων και πυκνότητας.

ContourPlot[f ,{x , xmin , xmax},{y , ymin , ymax}]	Δίνει το γράφημα του περιγράμματος της f συναρτήσει των x και y .
DensityPlot[f ,{x , xmin , xmax},{y , ymin , ymax}]	Δίνει το γράφημα της πυκνότητας της f .

```
In[6]:= ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```

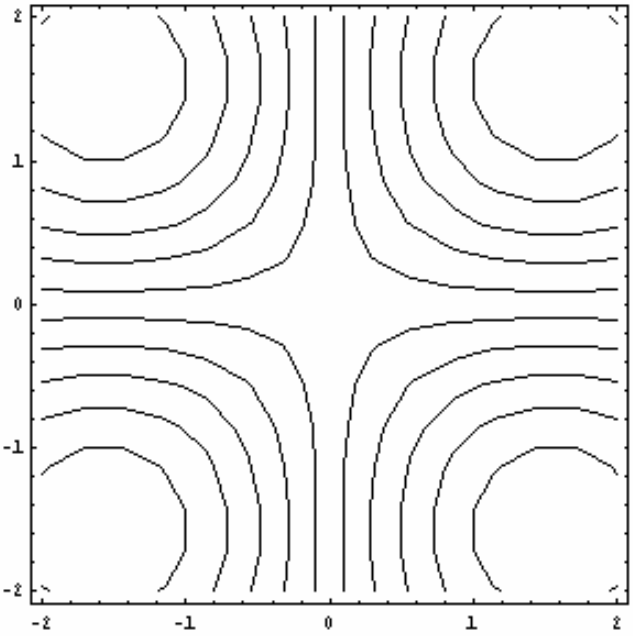


Δίνει το γράφημα του περιγράμματος της συνάρτησης Sin[x] Sin[y] .

Ένα γράφημα περιγράμματος δίνει την αίσθηση τοπογραφικού χάρτη μιας συνάρτησης

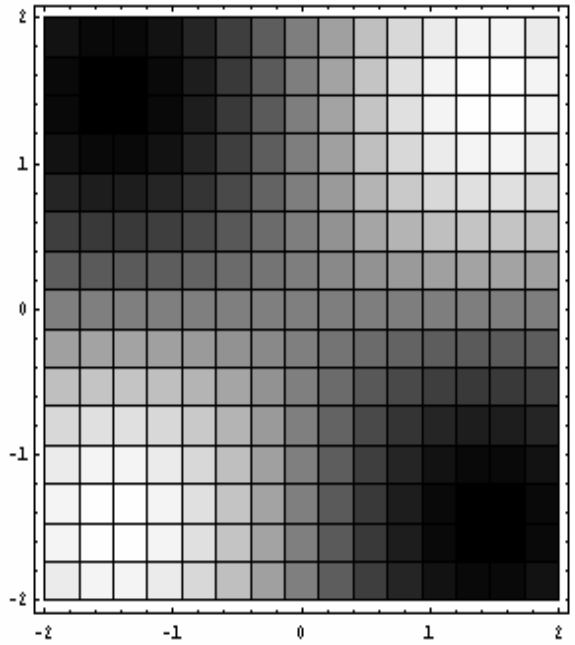
Τέτοιου είδους γραφήματα ενώνουν τα σημεία μιας επιφάνειας τα οποία έχουν το ίδιο ύψος .

```
In[3]:= Show[%, ContourShading → False]
```



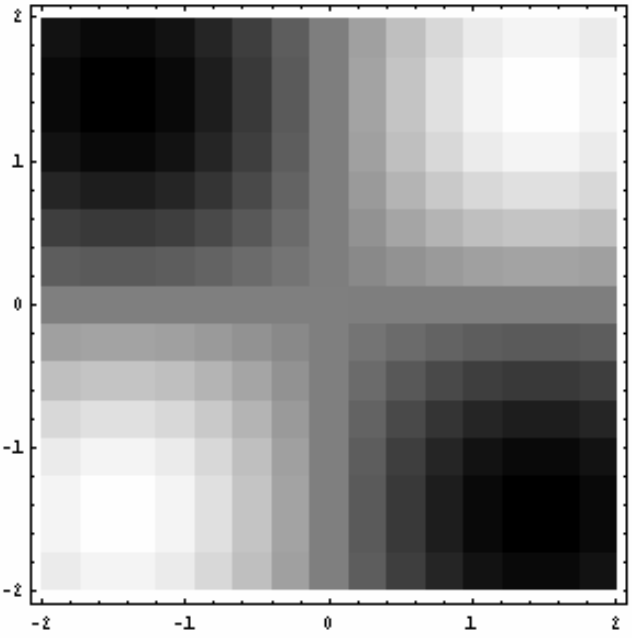
Αν κάποιος χρησιμοποιεί μόνιτορ ή εκτυπωτή που δεν μπορεί να χειριστεί πολύ καλά γκρίζες εικόνες, είναι προτιμότερο να απενεργοποιείται η σκίαση.

```
In[4]:= DensityPlot[Sin[x] Sin[y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



Τα διαγράμματα πυκνότητας δίνουν τις τιμές της συνάρτησης σε μια συμμετρική περιοχή σημείων. Οι πιο φωτεινές περιοχές έχουν μεγαλύτερες τιμές.

```
In[5]:= Show[%, Mesh → False]
```

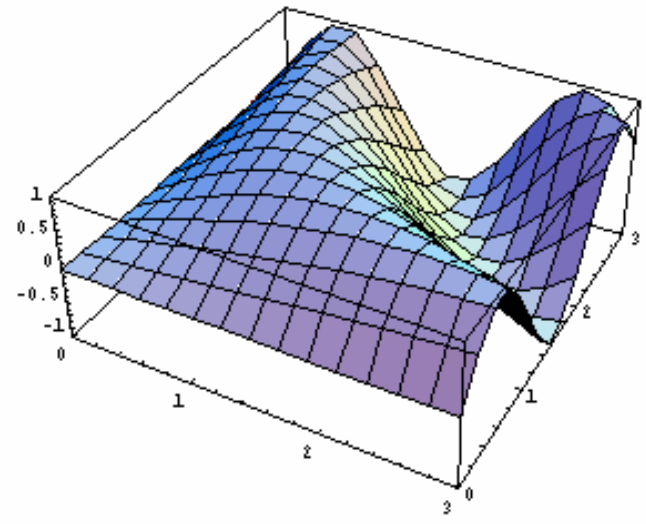


Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αφαιρέσουμε το πλέγμα. Όμως, ακόμα και αν έχουμε μεγάλο αριθμό περιοχών, τα γραφήματα σε πολλές περιπτώσεις φαίνονται καλύτερα αν υπάρχει πλέγμα.

5.7.4 Τρισδιάστατα γραφήματα επιφανειών.

Plot3D[f ,{x , xmin , xmax},{y , ymin , ymax}]	Δημιουργεί το τρισδιάστατο γράφημα της f σαν συνάρτηση των μεταβλητών x και y.

```
In[1]:= Plot3D[Sin[x y], {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]
```



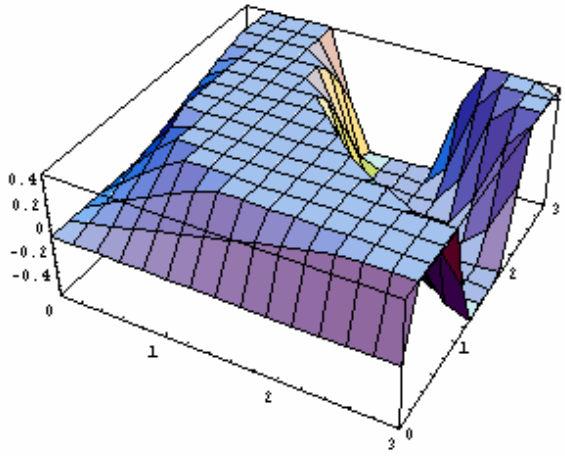
Εδώ βλέπουμε το τρισδιάστατο γράφημα της συνάρτησης sin(xy).

Υπάρχουν πολλές επιλογές για τρισδιάστατα γραφήματα στο Mathematica. Μερικές από αυτές φαίνονται παρακάτω:

Όνομα επιλογής	**Προκαθορισμένη τιμή**	
Axes	True	Αν θα συμπεριληφθούν άξονες
AxesLabel	None	Ονομασίες των αξόνων: Το όνομα zlabel καθορίζει την ονομασία του άξονα z, ενώ {xlabel, ylabel, zlabel} για όλους τους άξονες.
Boxed	True	Αν η επιφάνεια θα περικλείεται από ένα τρισδιάστατο κουτί.
ColorFunction	Automatic	Ποιο χρώμα θα χρησιμοποιηθεί για τη σκίαση .
TextStyle	$TextStyle	Έτσι καθορίζεται το στυλ που θα έχει ένα κείμενο σε ένα γράφημα .
FormatType	StandardForm	Έτσι καθορίζεται ο τύπος του κειμένου σε ένα γράφημα .
DisplayFunction	$DisplayFunction	Πώς εμφανίζονται τα γραφήματα στην οθόνη. Η επιλογή Identity δεν επιτρέπει την εμφάνισή τους.
FaceGrids	None	Αν θα υπάρχουν πλέγματα στις πλευρές του κουτιού που περικλείει το γράφημα. Με την επιλογή All χαράζονται πλέγματα σε όλες τις πλευρές.
HiddenSurface	True	Αν η επιφάνεια θα είναι συμπαγής .
Lighting	True	Αν η επιφάνεια θα χρωματιστεί χρησιμοποιώντας τεχνητό φωτισμό.
Mesh	True	Αν ένα πλέγμα μεταξύ των x και y θα χαραχθεί στην επιφάνεια .
PlotRange	Automatic	Το εύρος των συντεταγμένων που θα περικλείονται στο γράφημα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξής επιλογές: All, {zmin, zmax} ή {{xmin, xmax},{ymin, ymax},{zmin , zmax}}.
Shading	True	Αν θα υπάρχει σκίαση στην επιφάνεια ή αν θα παραμείνει λευκή.
ViewPoint	{1.3,-2.4,2}	Έτσι καθορίζονται οι συντεταγμένες του σημείου στο χώρο από το οποίο παρακολουθούμε την επιφάνεια.
PlotPoints	15	Ο αριθμός των σημείων κάθε κατεύθυνσης για τη δειγματοληψία της συνάρτησης. Για τον καθορισμό διαφορετικών αριθμών σημείων για την κατεύθυνση x και την κατεύθυνση y, χρησιμοποιείται ο εξής τρόπος: $\{n_x, n_y\}$
Compiled	True	Αν θα γίνει σύνθεση της συνάρτησης της οποίας το γράφημα παίρνουμε.

Μερικά παραδείγματα τρισδιάστατων γραφημάτων φαίνονται παρακάτω:

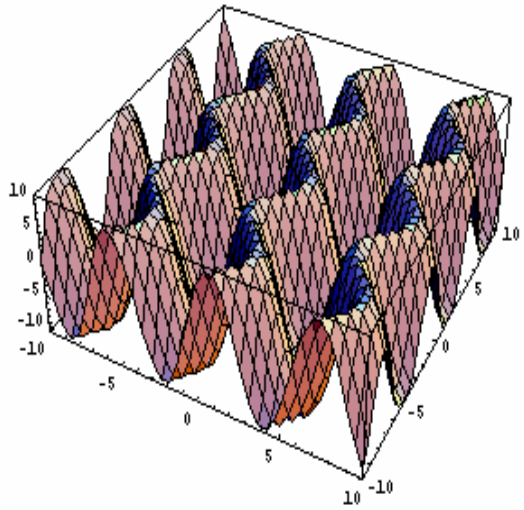
```
In[2]:= Show[%, PlotRange → {-0.5, 0.5}]
```




```
Out[2]= - SurfaceGraphics -
```

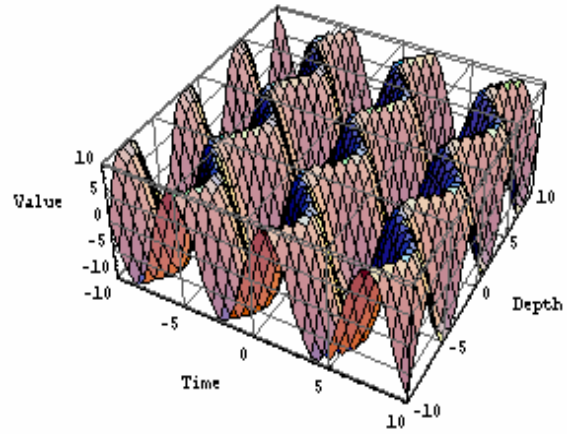
Εδώ ξανατυπώνεται το προηγούμενο γράφημα, σύμφωνα με την προηγούμενη εντολή, αλλά με αλλαγμένες κάποιες μεταβλητές. Θέτοντας την κλίμακα του άξονα z από –0.5 έως 0.5, βλέπουμε ένα μέρος από το γράφημα και όχι ολόκληρο.

```
In[3]:= Plot3D[10 Sin[x + Sin[y]], {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
  PlotPoints → 40]
```



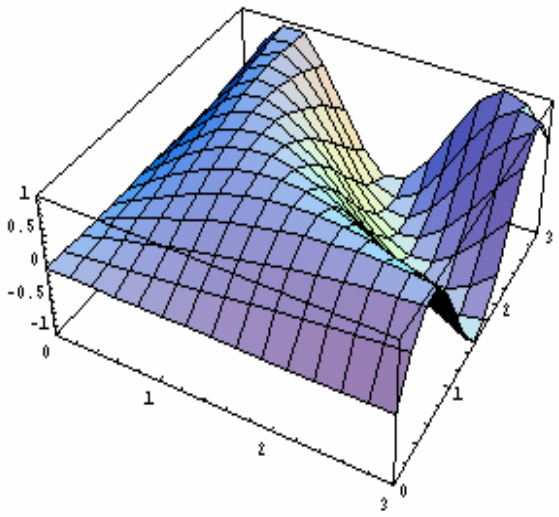
Εδώ βλέπουμε το γράφημα της συνάρτησης 10sin(x + sin(y)) ενώ παράλληλα καθορίζεται ο αριθμός των σημείων για τη δειγματοληψία της συνάρτησης. Σε όσο περισσότερα σημεία δειγματοληπτούμε μια συνάρτηση, τόσο καλύτερη εικόνα παίρνουμε.

```
In[4]:= Show[%, AxesLabel → {"Time", "Depth", "Value"},
          FaceGrids → All]
```



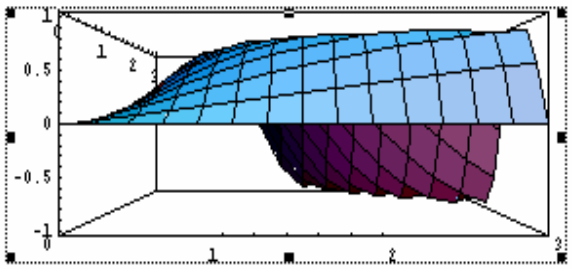
Εδώ βλέπουμε το προηγούμενο γράφημα με πλέγματα σε όλες τις πλευρές και ονόματα στους τρεις άξονες.

```
In[5]:= Plot3D[Sin[x y], {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]
```



Το γράφημα αυτό παρακολουθείται από από το προκαθορισμένο σημείο με συντεταγμένες {1.3, -2.4, 2}.

```
In[6]:= Show[%, ViewPoint → {0, -2, 0}]
```



Τώρα βλέπουμε το ίδιο γράφημα από άλλη οπτική γωνία: από το σημείο με συντεταγμένες {0 , -2 , 0}.

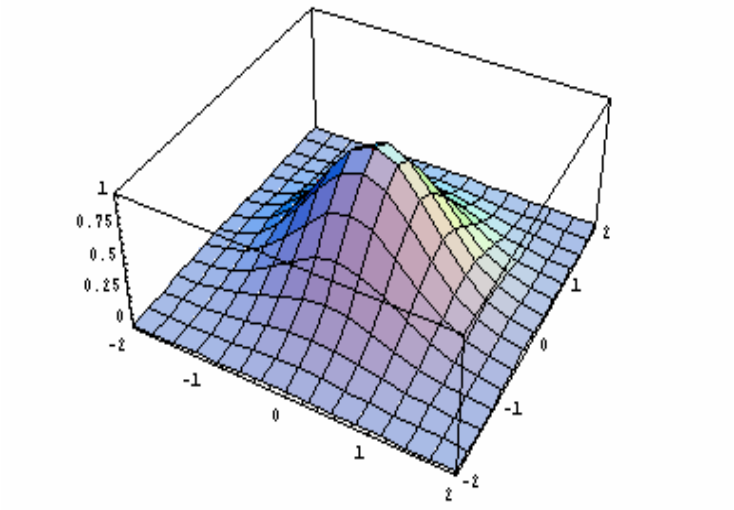
Μερικές τυπικές επιλογές για το σημείο από το οποίο μπορούμε να δούμε ένα γράφημα είναι οι εξής:

{1.3 , -2.4 , 2}	Προκαθορισμένη τιμή για την οπτική γωνία.
{0 , -2 , 0}	Μπροστά μέρος.
{0 , -2 , 2}	Μπροστά και πάνω μέρος.
{0 , -2 , -2}	Μπροστά και κάτω μέρος.
{-2 , -2 , 0}	Αριστερή γωνία.
{2 , -2 , 0}	Δεξιά γωνία.
{0 , 0 , 2}	Κάτω μέρος.

Το ανθρώπινο οπτικό σύστημα δεν είναι ιδιαίτερα καλό στην κατανόηση σύνθετων μαθηματικών παραστάσεων. Έτσι είναι απαραίτητο να δημιουργηθούν εικόνες που περιέχουν όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες για το είδος της παράστασης.

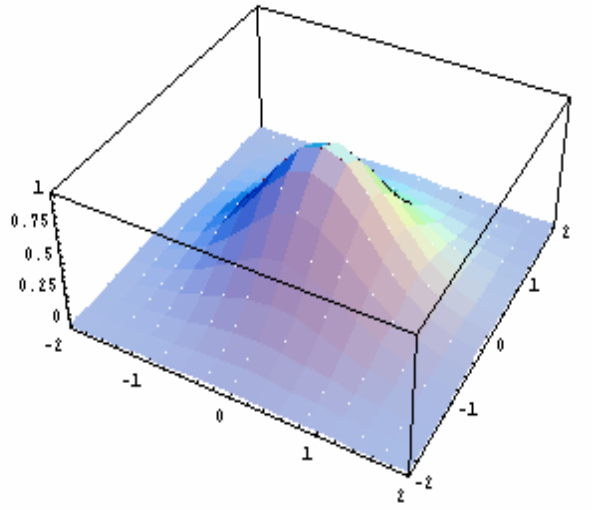
Είναι χρήσιμο, τα σημεία από τα οποία παρακολουθούμε μια παράσταση να βρίσκονται κοντά σε αυτήν . Επίσης, είναι χρήσιμο η παράσταση να περικλείεται σε ένα κουτί ώστε να μπορεί το μάτι εύκολα να αναγνωρίσει τα όριά της.

```
In[1]:= g = Plot3D[Exp[-(x^2 + y^2)], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



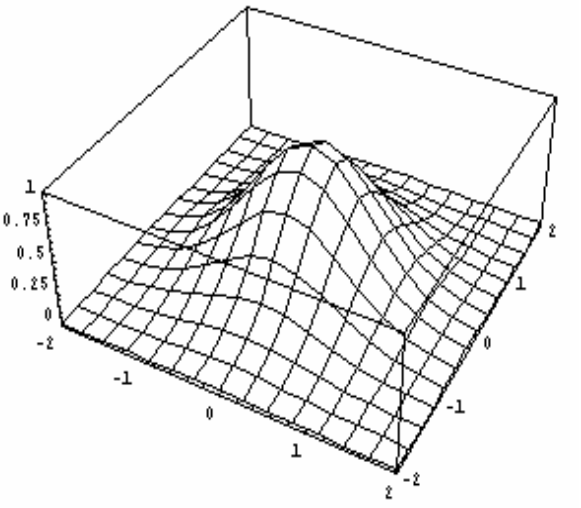
Το απλό αυτό γράφημα έχει τις προκαθορισμένες τιμές για τις διάφορες επιλογές.

In[2]:= **Show[g, Mesh → False]**



Εδώ βλέπουμε το ίδιο γράφημα με τη διαφορά ότι στην επιφάνεια δεν είναι χαραγμένο το πλέγμα. Συνήθως είναι δυσκολότερο να διακρίνει κανείς τη μορφή της επιφάνειας αν δεν υπάρχει το πλέγμα.

In[3]:= **Show[g, Shading → False]**



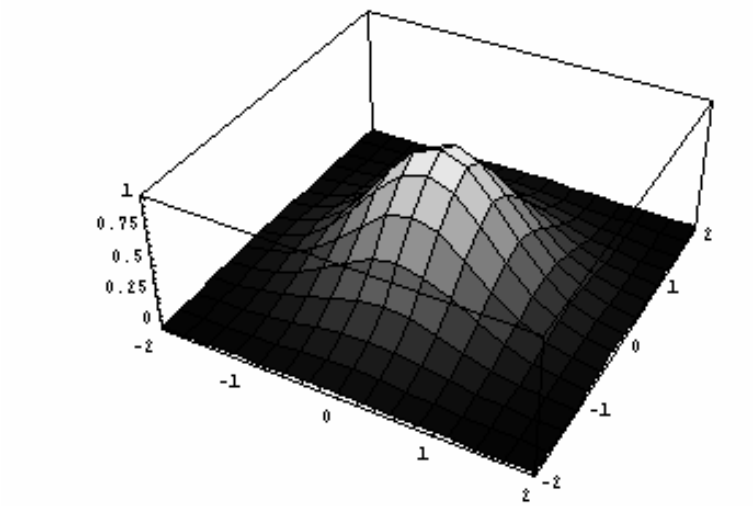
Σε αυτήν την περίπτωση έχει αφαιρεθεί η σκίαση από την επιφάνεια.

Η ύπαρξη σκίασης και πλέγματος είναι πολλές φορές μεγάλη βοήθεια στην κατανόηση της μορφής μιας παράστασης. Σε ορισμένες όμως οθόνες δεν είναι δυνατόν να υπάρχει σκίαση. Επίσης η σκίαση καθυστερεί το σύστημα στη δημιουργία του γραφήματος.

Για καλύτερη κατανόηση των τρισδιάστατων γραφημάτων, το Mathematica προσθέτει και χρώμα στις παραστάσεις. Στην στάνταρ κατάσταση, το Mathematica υποθέτει ότι υπάρχουν τρεις πηγές φωτός που φωτίζουν το γράφημα από την πάνω δεξιά πλευρά της εικόνας. Μπορούμε όμως να φωτίσουμε ένα γράφημα και από άλλες πλευρές εάν επιθυμούμε.

Παρά τη βοήθεια που μπορεί να προσφέρει ο φωτισμός στην κατανόηση της μορφής μιας παράστασης, μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να μπερδέψει. Έτσι μπορούμε να καταργήσουμε το φωτισμό της παράστασης και τότε η επιφάνεια την οποία παριστάνει το γράφημα θα έχει γκρι αποχρώσεις.

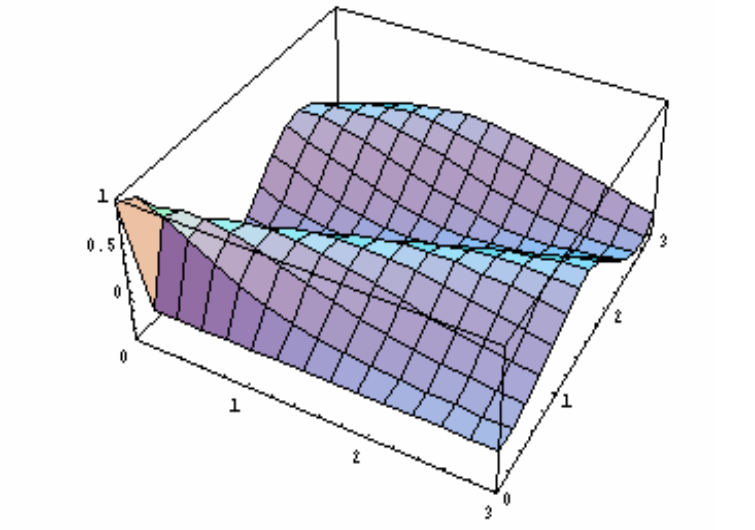
```
In[4]:= Show[%, Lighting → False]
```



Τώρα, απενεργοποιώντας το φωτισμό της παράστασης, αυτή σκιάζεται από γκρι αποχρώσεις, που καθορίζονται από το ύψος.

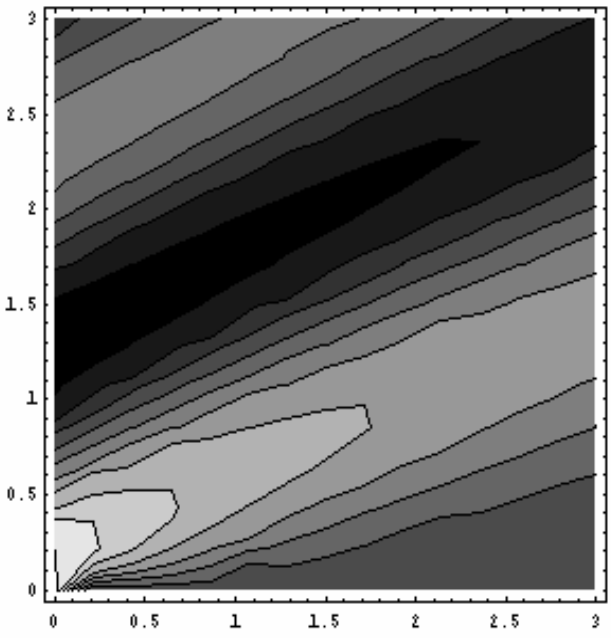
Τα γραφήματα περιγραμμάτων, πυκνότητας και επιφανειών, είναι τρεις διαφορετικοί τρόποι απεικόνισης μιας συνάρτησης. Όταν το Mathematica καλείται να παράγει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, κρατάει στη μνήμη του τις πληροφορίες που του δίνουμε και μπορεί χρησιμοποιώντας ξανά τις ίδιες πληροφορίες να δημιουργήσει άλλης μορφής γραφήματα.

```
In[5]:= Plot3D[BesselJ[nu, 3 x], {nu, 0, 3}, {x, 0, 3}]
```



Εδώ βλέπουμε ένα γράφημα μιας επιφάνειας.

```
In[6]:= Show[ContourGraphics[%]]
```

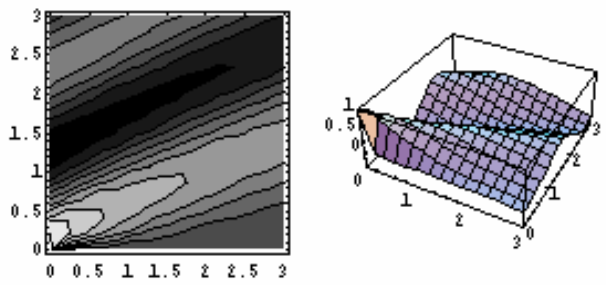


Εδώ βλέπουμε τη μετατροπή του προηγούμενου τρισδιάστατου γραφήματος, που δημιουργήθηκε με την εντολή Plot3D, σε γράφημα περιγράμματος.

Οι μετατροπές μεταξύ των διαφόρων τύπων γραφημάτων γίνονται με τις εξής εντολές:

Show[ContourGraphics[g]]	Μετατροπή σε γράφημα περιγράμματος.
Show[DensityGraphics[g]]	Μετατροπή σε γράφημα πυκνότητας.
Show[SurfaceGraphics[g]]	Μετατροπή σε γράφημα επιφάνειας.
Show[Graphics[g]]	Μετατροπή σε δυσδιάστατη εικόνα.

```
In[7]:= Show[GraphicsArray[{%, %%}]]
```



Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή GraphicsArray για να πάρουμε δύο διαφορετικούς τύπους γραφημάτων μαζί.

5.7.5 Απεικόνιση λίστας δεδομένων.

Έως τώρα έχει συζητηθεί πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Mathematica για να απεικονίσουμε συναρτήσεις. Δίνουμε στο Mathematica τη συνάρτηση και αυτό δημιουργεί μια καμπύλη ή μια επιφάνεια, υπολογίζοντας την τιμή της συνάρτησης σε πολλά διαφορετικά σημεία.

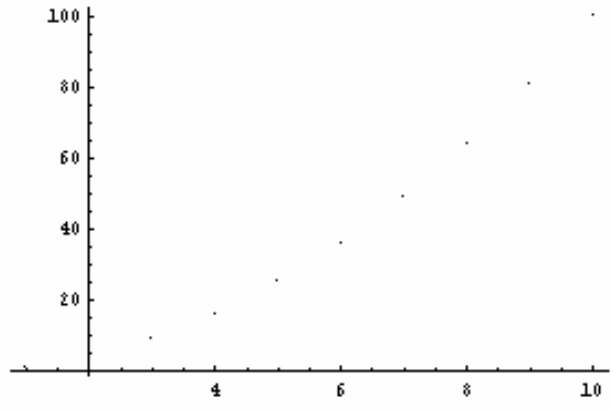
Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πώς μπορούμε να δημιουργήσουμε γραφήματα από λίστες δεδομένων αντί συναρτήσεις. Οι εντολές που χρησιμοποιούνται από το Mathematica και σε αυτή την περίπτωση είναι ανάλογες με όσες έχουν συζητηθεί ως τώρα για τις συναρτήσεις.

ListPlot[{y_1 , y_2 , …}]	Απεικονίζει τις τιμές του y για τις διάφορες τιμές του x 1 , 2 , …
ListPlot[{{x_1 , y_1},{x_2 , y_2}, …}]	Απεικονίζει τα σημεία {x_1 , y_1},{x_2 , y_2} κτλ.
ListPlot[list , PlotJoined → True]	Ενώνει τα σημεία με γραμμές.
ListPlot3D[{{z_{11} , z_{12} , …},{z_{21} , z_{22} , …}, …}]	Δημιουργεί το τρισδιάστατο γράφημα για μια περιοχή υψών z_{yx} .
ListContourPlot[Array]	Δημιουργεί το γράφημα περιγράμματος μιας περιοχής υψών.
ListDensityPlot[Array]	δημιουργεί γράφημα πυκνότητας.

```
In[1]:= t = Table[i^2, {i, 10}]

Out[1]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

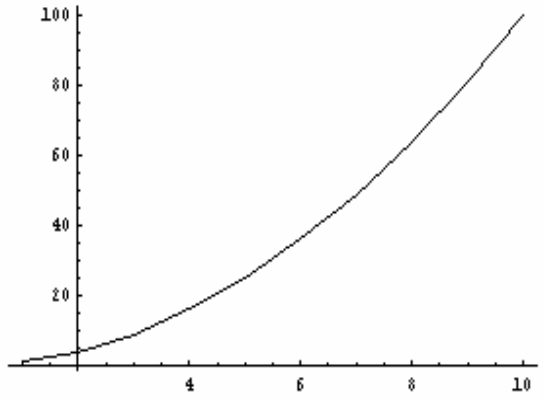
In[2]:= ListPlot[t]
```



Εδώ βλέπουμε μια λίστα από τιμές.

Τα σημεία που αντιπροσωπεύονται από τις παραπάνω τιμές, τοποθετούνται στους άξονες.

```
In[3]:= ListPlot[t, PlotJoined → True]
```

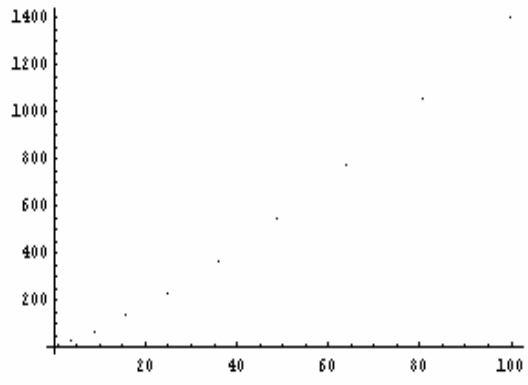


Τα σημεία ενώνονται με μια γραμμή.

```
In[4]:= Table[{i^2, 4 i^2 + i^3}, {i, 10}]

Out[4]= {{1, 5}, {4, 24}, {9, 63}, {16, 128}, {25, 225}, {36, 360},
      {49, 539}, {64, 768}, {81, 1053}, {100, 1400}}

In[5]:= ListPlot[%]
```

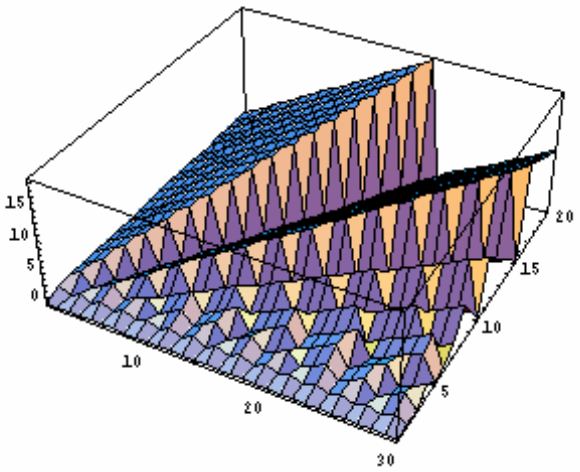


Εδώ παίρνουμε μια λίστα από ζευγάρια τιμών για τα x και y.

Απεικονίζονται τα παραπάνω σημεία στους άξονες.

```
In[7]:= t3 = Table[Mod[x, y], {y, 20}, {x, 30}];

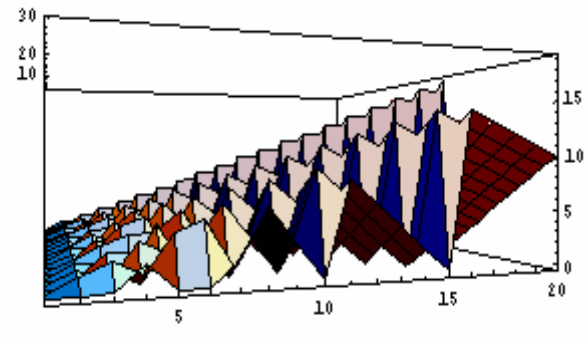
In[8]:= ListPlot3D[t3]
```



Εδώ παίρνουμε μια ορθογώνια περιοχή τιμών . Η περιοχή είναι αρκετά μεγάλη, έτσι με το “ ; ” εμποδίζουμε να αποτελέσματα να τυπωθούν.

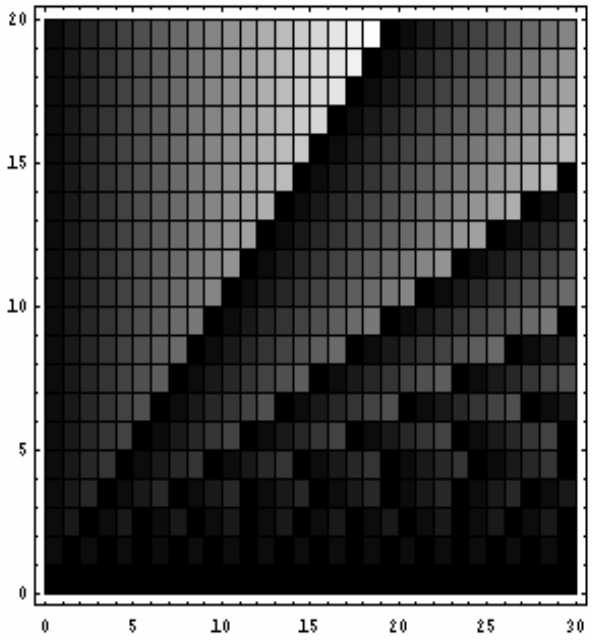
Εδώ βλέπουμε το τρισδιάστατο γράφημα της παραπάνω περιοχής τιμών.

```
In[9]:= Show[%, ViewPoint → {1.5, -0.5, 0}]
```



Χρησιμοποιώντας την εντολή Show ξανατυπώνουμε το γράφημα, όπως είναι γνωστό, αλλά από διαφορετική οπτική γωνία.

```
In[10]:= ListDensityPlot[t3]
```



Βλέπουμε το γράφημα πυκνότητας της παραπάνω περιοχής τιμών.

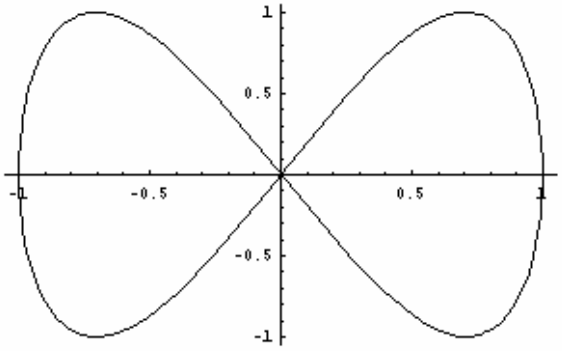
5.7.6 Παραμετρικά γραφήματα.

Σε προηγούμενη παράγραφο είχε περιγραφεί πώς να απεικονίζονται στο Mathematica καμπύλες στις οποίες δίνεται η y συντεταγμένη κάθε σημείου Σα συνάρτηση της x συντεταγμένης. Στο Mathematica μπορούμε επίσης να πάρουμε και παραμετρικά γραφήματα. Σε ένα τέτοιο γράφημα δίνουμε και τις δύο συντεταγμένες του κάθε σημείου Σα συνάρτηση μιας τρίτης παραμέτρου, πχ t.

ParametricPlot[{f_x , f_y},{ t , tmin , tmax}]	Δημιουργεί παραμετρικό γράφημα .
ParametricPlot[{{f_x , f_y},{g_x , g_y}, …},{t , tmin , tmax}]	Απεικονίζει διάφορες καμπύλες
ParametricPlot[{f_x , f_y},{ t , tmin , tmax}, AspectRatio → Automatic]	Προσπάθεια για διατήρηση του σχήματος της καμπύλης .

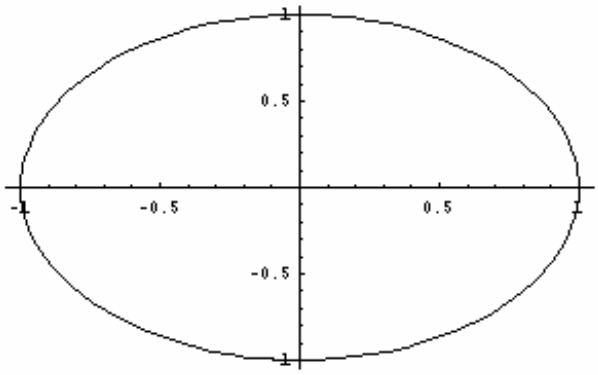
Μερικά παραδείγματα παραμετρικών γραφημάτων είναι τα εξής:

```
In[1]:= ParametricPlot[{Sin[t], Sin[2 t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```



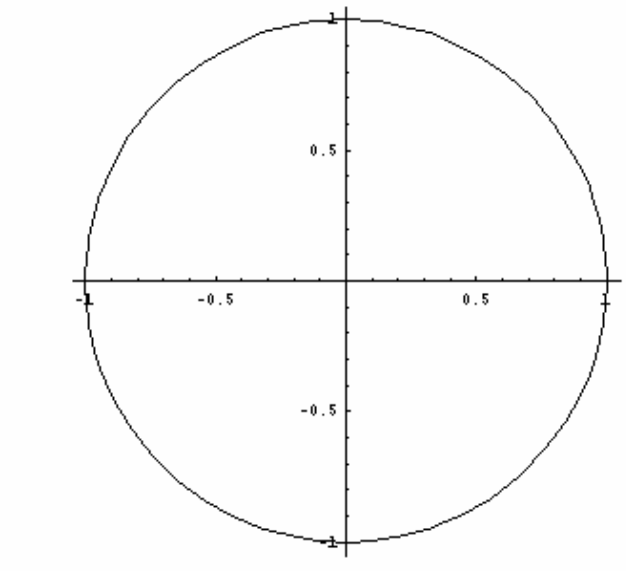
Σε αυτή την καμπύλη, στον άξονα x έχουν τοποθετηθεί οι τιμές της συνάρτησης Sin(x) και στον άξονα y οι τιμές της συνάρτησης Sin(2x). Το t κυμαίνεται από 0 έως 2π.

```
In[2]:= ParametricPlot[{Sin[t], Cos[t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```



Το σχήμα της παραγόμενης καμπύλης εξαρτάται από το λόγο ύψους προς πλάτος για το όλο γράφημα.

```
In[3]:= Show[%, AspectRatio → Automatic]
```

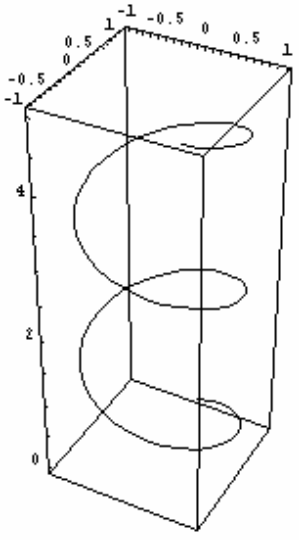


Θέτοντας την επιλογή AspectRatio → Automatic, παρουσιάζεται το αληθινό σχήμα της καμπύλης όπως καθορίζεται από τις τιμές των πραγματικών συντεταγμένων που περιέχει.

ParametricPlot3D[{f_x , f_y , f_z},{ t , tmin , tmax}]	Δημιουργεί το παραμετρικό γράφημα μιας τρισδιάστατης καμπύλης.
ParametricPlot3D[{f_x , f_y , f_z},{t , tmin , tmax},{u , umin , umax}]	Δημιουργεί το παραμετρικό γράφημα μιας τρισδιάστατης επιφάνειας.
ParametricPlot3D[{f_x , f_y , f_z , s}, …]	Αναπαριστά τα μέρη του παραμετρικού γραφήματος σύμφωνα με τη συνάρτηση s.
ParametricPlot3D[{{f_x , f_y , f_z},{g_x , g_y , g_z}, …},…]	Αναπαριστά διάφορα αντικείμενα μαζί.

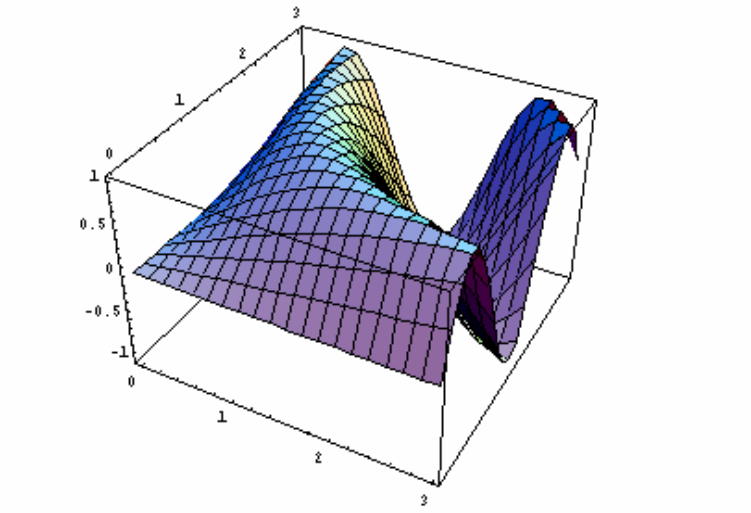
Η εντολή ParametricPlot3D[{f_x , f_y , f_z},{ t , tmin , tmax}] είναι η ακριβώς αντίστοιχη για τις τρεις διαστάσεις της εντολής ParametricPlot[{f_x , f_y},{ t , tmin , tmax}] η οποία αναφέρεται σε δυσδιάστατα γραφήματα. Και στις δύο περιπτώσεις, το Mathematica δημιουργεί μια ακολουθία σημείων των οποίων οι τιμές εξαρτώνται από την παράμετρο t, και στη συνέχεια δημιουργεί μια καμπύλη ενώνοντας αυτά τα σημεία. Με την εντολή ParametricPlot, η καμπύλη είναι δύο διαστάσεων, ενώ με την εντολή ParametricPlot3D, η καμπύλη είναι τριών διαστάσεων.

```
In[4]:= ParametricPlot3D[{Sin[t], Cos[t], t / 3}, {t, 0, 15}]
```



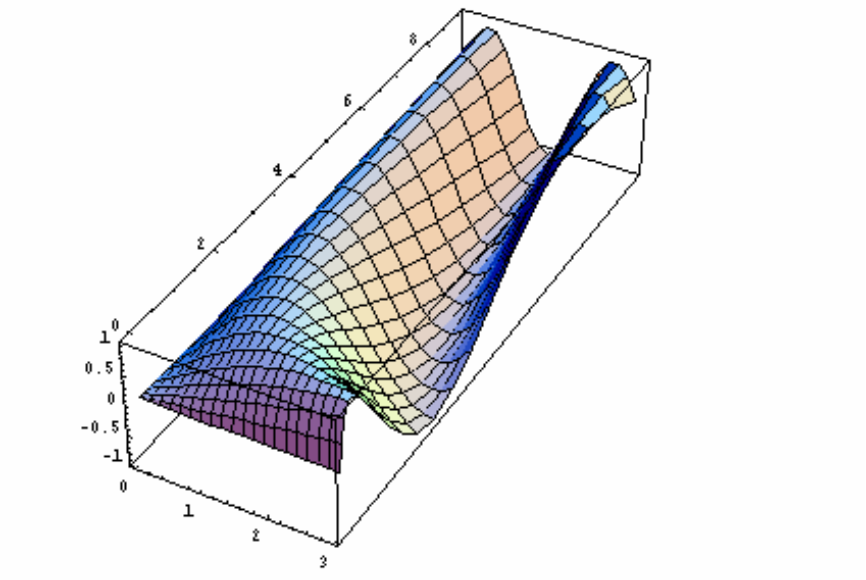
Εδώ βλέπουμε το παραμετρικό γράφημα μιας ελικοειδούς καμπύλης. Καθώς μεταβάλλεται το t, δημιουργείται μια κυκλική κίνηση για τις x και y κατευθύνσεις, και γραμμική κίνηση για την z κατεύθυνση.

```
In[5]:= ParametricPlot3D[{t, u, Sin[t u]}, {t, 0, 3}, {u, 0, 3}]
```



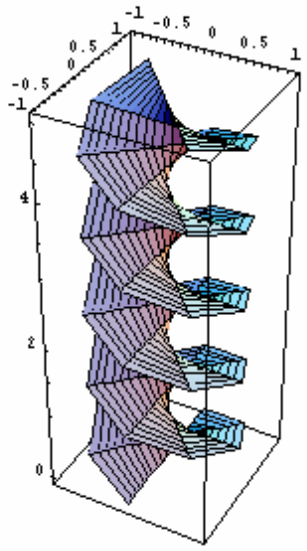
Εδώ οι x και y συντεταγμένες δίνονται απλά από τα t και u. Το αποτέλεσμα είναι ένα μη παραμετρικό γράφημα μιας επιφάνειας σαν αυτά που παράγονται από την εντολή Plot3D.

```
In[6]:= ParametricPlot3D[{t, u^2, Sin[t u]}, {t, 0, 3}, {u, 0, 3}]
```



Εδώ βλέπουμε την ίδια επιφάνεια όπως προηγουμένως, με τη διαφορά ότι η y συντεταγμένη ακολουθεί μια δευτέρου βαθμού συνάρτηση.

```
In[7]:= ParametricPlot3D[{u Sin[t], u Cos[t], t / 3}, {t, 0, 15},
        {u, -1, 1}]
```



Έτσι παράγεται μια ελικοειδής επιφάνεια, παίρνοντας την ελικοειδή καμπύλη που φαίνεται παραπάνω, και σε κάθε σημείο της καμπύλης σχεδιάζεται ένα τετράπλευρο.



Γενικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά γραφήματα πολύπλοκων επιφανειών, χρησιμοποιώντας την εντολή ParametricPlot3D. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να στρέψουμε την καμπύλη, χρησιμοποιώντας διάφορες συναρτήσεις για τις τρεις συντεταγμένες.



Κεφάλαιο 6

Επίλυση προβλημάτων ακτινοβολίας γραμμικών κεραιών με χρήση του Mathematica.

6.0 Διαγράμματα ακτινοβολίας απλών κεραιών.

Παρακάτω αναλύεται η διαδικασία παραγωγής των διαγραμμάτων ακτινοβολίας δύο απλών κεραιών :
- Δίπολου μήκους λ/2
- Κεραίας οδεύοντος κύματος

Η ένταση ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση :

$$U(\theta) = r^2 P_r(r,\theta) = \frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos\left(k_0 \frac{L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(k_0 \frac{L}{2}\right)}{\sin\theta}\right)^2$$

όπου $\mathrm{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$

6.0.1 Δίπολο μήκους λ/2:

Για το δίπολο μήκους λ/2 , δηλαδή $L = \frac{\lambda}{2}$, η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$U(\theta) = \frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\theta}\right)^2$$

Σχεδιάζουμε τη συνάρτηση $\frac{U(\theta)}{U_{\max}}$

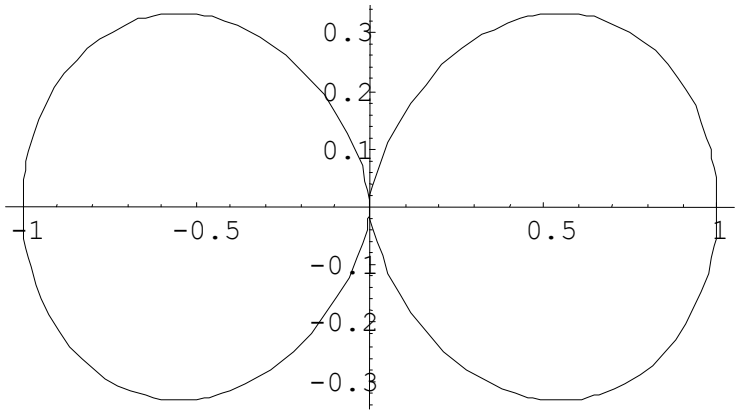
όπου $U_{\max} = \frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos 90\right)}{\sin 90}\right)^2 = \frac{nI_m^2}{8\pi^2}$

Επομένως , $\frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right)^2$

Χρησιμοποιώντας το Mathematica έχουμε το παρακάτω διάγραμμα ακτινοβολίας για το δίπολο μήκους λ/2 :

L = λ/2

$-\pi \le \theta \le \pi$



Σχήμα 1: Διάγραμμα ακτινοβολίας δίπολου μήκους λ/2.

6.0.2 Δίπολο μήκους λ.

Η συνάρτηση U(θ) , για $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ και L = λ , γίνεται:

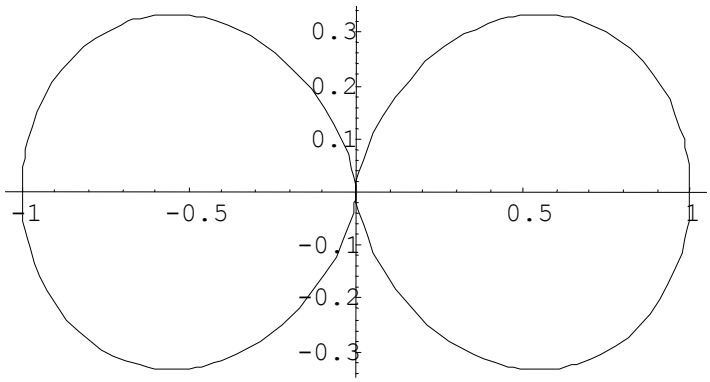
$$U(\theta) = \frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos(\pi\cos\theta) - \cos(\pi)}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos(\pi\cos\theta) + 1}{\sin\theta}\right)^2$$

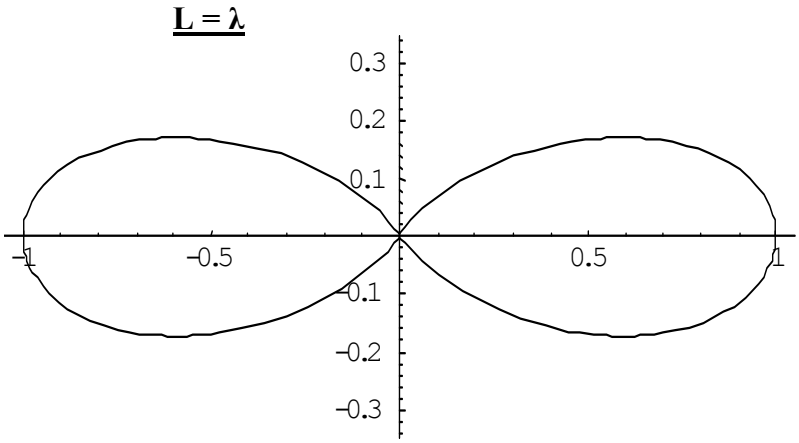
$$U_{\max} = \frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos(\pi\cos 90) - \cos(\pi)}{\sin\theta}\right)^2 = 2\cdot\frac{nI_m^2}{8\pi^2}$$

Επομένως,

$$\frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(\pi\cos\theta) + 1}{\sin\theta}\right)^2$$

Έτσι έχουμε:





Σχήμα 2. Διάγραμμα ακτινοβολίας δίπολου μήκους λ .

Την εντολή Show τη χρησιμοποιούμε για να χαράξει το Mathematica το διάγραμμα ακτινοβολίας του δίπολου μήκους λ στην ίδια κλίμακα όπως για το λ/2 και να είναι δυνατή η σύγκριση.

Επισημαίνεται η αύξηση του αριθμού των λοβών ακτινοβολίας με την αύξηση του μήκους του δίπολου , ενώ για δίπολα μικρότερα του μήκους κύματος , το διάγραμμα ακτινοβολίας έχει την ίδια μορφή με αυτή του βραχέως δίπολου , με παράλληλη όμως αύξηση της κατευθυντικότητας , λόγω της αντίστοιχης μείωσης του γωνιακού εύρους .

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα ακτινοβολίας δίπολων διαφόρων μηκών .

6.0.3 Δίπολο μήκους 3λ/2

Η ένταση ακτινοβολίας θα είναι :

$$U(\theta)=\frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos\left(k_0\frac{L}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(k_0\frac{L}{2}\right)}{\sin\theta}\right)^2$$

$$k_0\frac{L}{2}=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

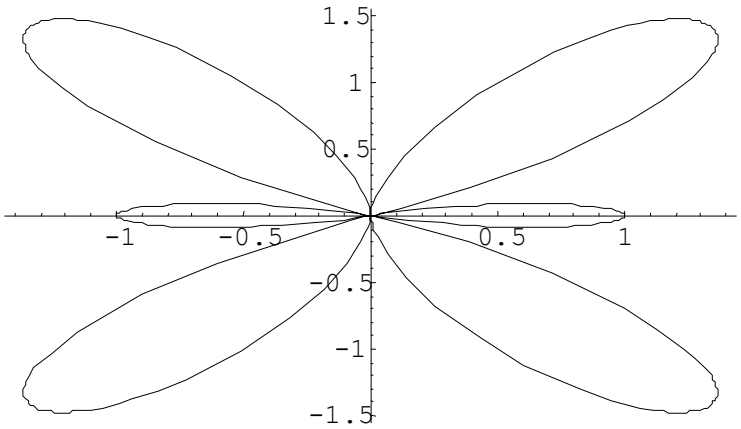
Επομένως:

$$U(\theta)=\frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\theta}\right)^2=\frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\right)^2$$

$$U_{\max}=\frac{nI_m^2}{8\pi^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos 90\right)}{\sin 90}\right)^2=\frac{nI_m^2}{8\pi^2}$$

Σχεδιάζεται η συνάρτηση $$\frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \left(\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right)^2$$

L = 3λ/2



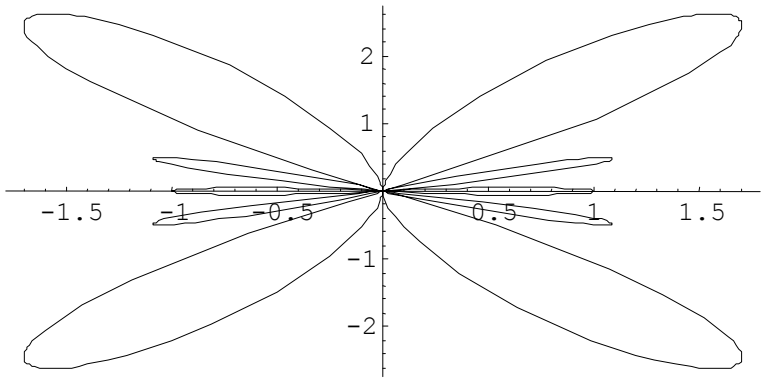
Σχήμα 3: Διάγραμμα ακτινοβολίας δίπολου μήκους 3λ/2

6.0.4 Δίπολο μήκους 5λ/2

Με όμοιο τρόπο :

$$\frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \left(\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right)^2$$

L = 5λ/2

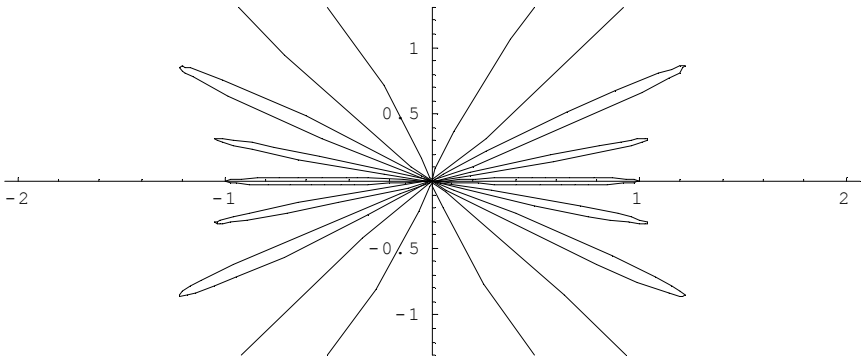


*Σχήμα 4: **Διάγραμμα ακτινοβολίας δίπολου μήκους 5λ/2***

6.0.5 Δίπολο μήκους 7λ:

$$\frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(7\pi\cos\theta)+1}{\sin\theta}\right)^2$$

L = 7λ



Σχήμα 5: Διάγραμμα ακτινοβολίας δίπολου μήκους 7λ .

6.0.6 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους λ/2.

Η ένταση ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση:

$$U(\theta) = I^2\,\frac{n}{2\lambda^2 k^2}\,\frac{\sin^2\left[kL\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = I^2\,\frac{15}{\pi}\,\frac{\sin^2\left[kL\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

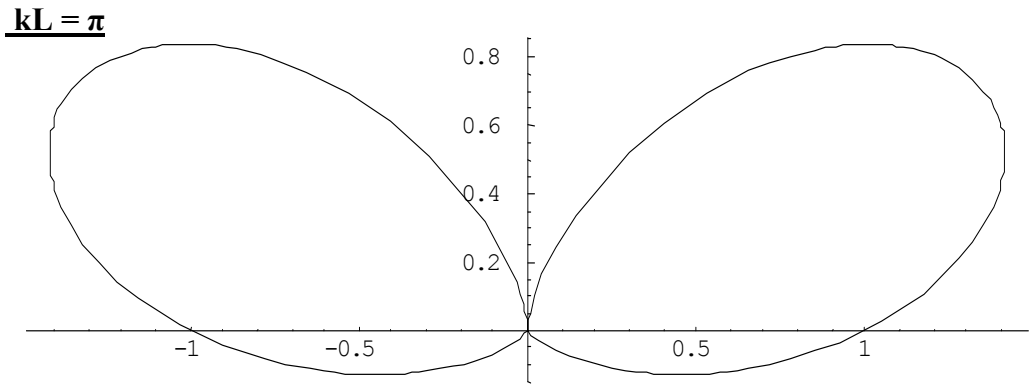
Για $kL = \pi$ έχουμε:

$$U(\theta) = I^2\,\frac{15}{\pi}\,\frac{\sin^2\left[\pi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$U_{\max} = I^2\,\frac{15}{\pi}\,\frac{\sin^2\left[\pi\sin^2\left(\frac{90}{2}\right)\right]\cos^2\left(\frac{90}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{90}{2}\right)} = I^2\,\frac{15}{\pi}$$

Σχεδιάζουμε τη

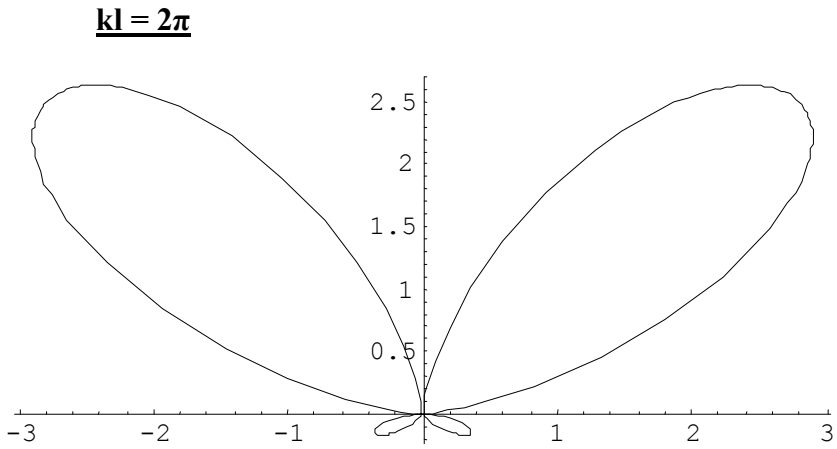
$$\frac{U(\theta)}{U_{\max}} = \frac{\sin^2\left[\pi\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



Σχήμα 6: ***Διάγραμμα ακτινοβολίας κεραίας οδεύοντος κύματος μήκους λ/2***

Ομοίως σχεδιάζουμε και για μήκος λ.

6.0.7 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους λ.



Σχήμα 7: Διάγραμμα ακτινοβολίας κεραίας οδεύοντος κύματος μήκους λ.

Όπως φαίνεται στα 2 παραπάνω σχήματα, έχουν σχεδιαστεί επιλεκτικά τα διαγράμματα ακτινοβολίας κεραιών οδεύοντος κύματος με διαφορετικά μήκη. Το διάγραμμα ακτινοβολίας διατηρεί η γενική του μορφή σε σχέση με τους κύριους λοβούς ακτινοβολίας, ενώ ο αριθμός των δευτερευόντων λοβών αυξάνεται με την αύξηση του μήκους της κεραίας. Επιπλέον, ο μέγιστος λοβός ακτινοβολίας βρίσκεται σε γωνία ως προς τον άξονα της κεραίας, η οποία μειώνεται καθώς αυξάνεται το μήκος της κεραίας με παράλληλη μείωση του εύρους δέσμης του.

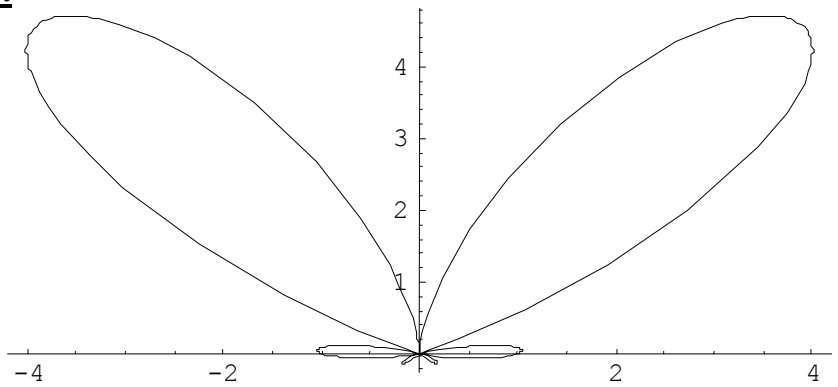
Γενικότερα, η κεραία οδεύοντος κύματος έχει ιδιότητες ευρείας ζώνης σε ότι αφορά το διάγραμμα ακτινοβολίας της, που διατηρεί τη μορφή του, σε

αλλαγές του παράγοντα $kL = 2\pi L/\lambda$ που μπορεί να οφείλεται και σε αλλαγή του μήκους κύματος λ.

Με τον ίδιο τρόπο σχεδιάζουμε τα διαγράμματα ακτινοβολίας κεραιών οδεύοντος κύματος για διάφορα μήκη.

6.0.8 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους 3λ/2:

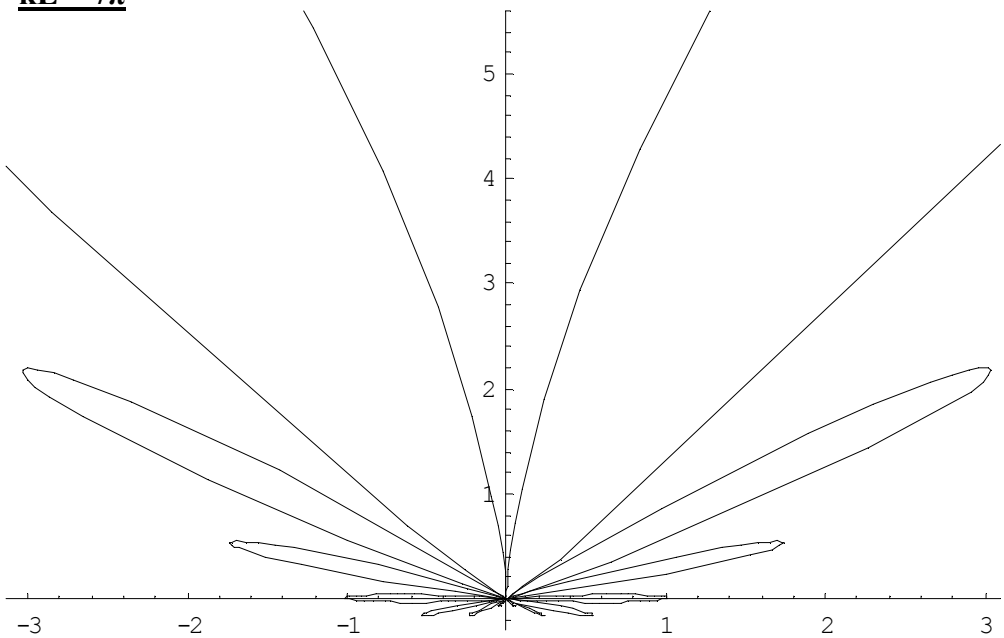
kL = 3π



Σχήμα 8: Διάγραμμα ακτινοβολίας κεραίας οδεύοντος κύματος μήκους 3λ/2 .

6.0.9 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους 7λ/2:

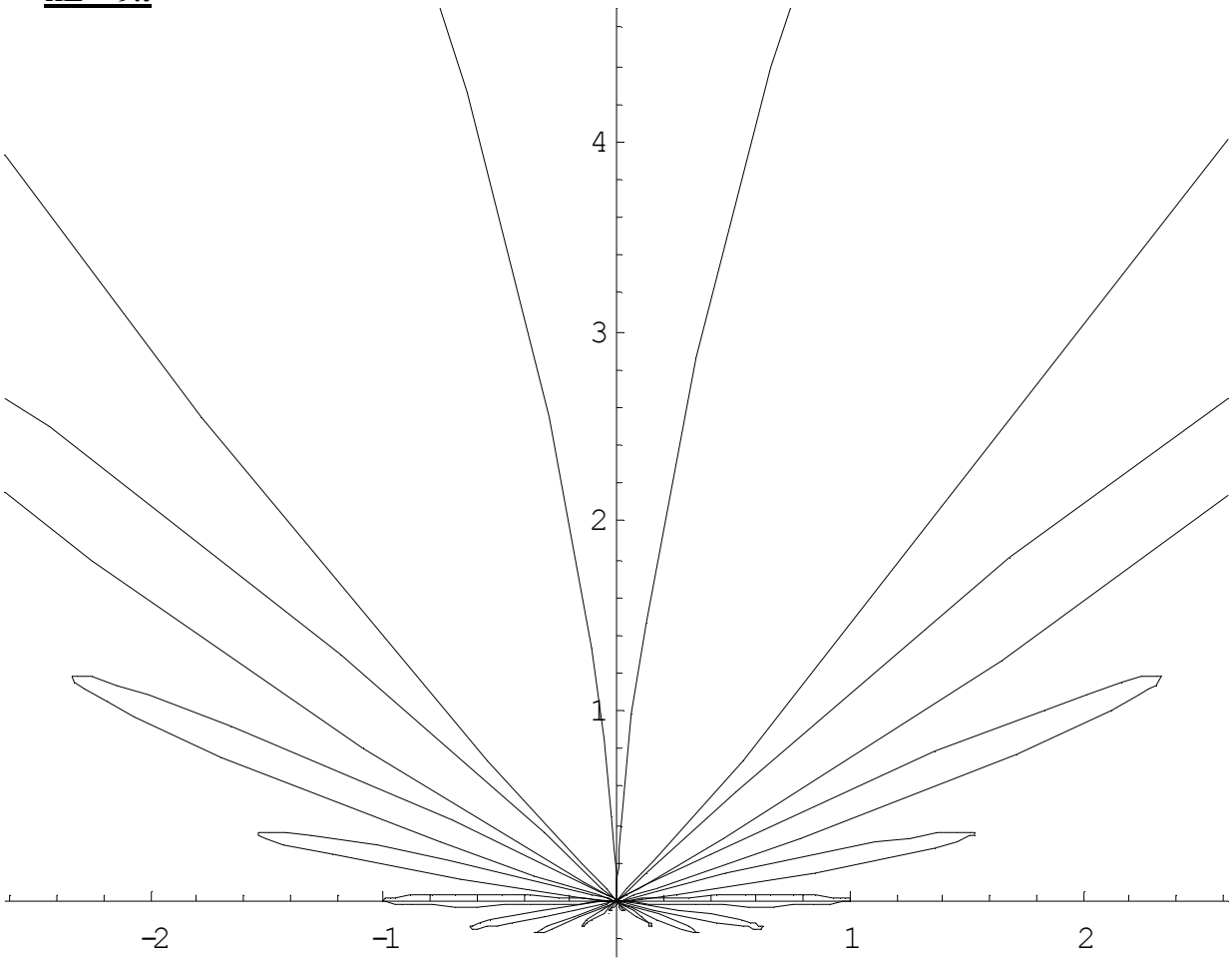
kL = 7π



Σχήμα 9: Διάγραμμα ακτινοβολίας κεραίας οδεύοντος κύματος μήκους 7λ/2 .

6.0.10 Κεραία οδεύοντος κύματος μήκους 9λ/2.

kL = 9π



Σχήμα 10: Διάγραμμα ακτινοβολίας κεραίας οδεύοντος κύματος μήκους 9λ/2 .

6.1 Δυσδιάστατα Διαγράμματα:

Υπάρχουν διάφορες συναρτήσεις που διευκολύνουν το σχεδιασμό δυσδιάστατων (2D) διαγραμμάτων κεραιών:

- PatPlotxy[f] για το επίπεδο x – y
- PatPlotyz[f] για το επίπεδο y – z
- PatPlotxz[f] για το επίπεδο x – z
- PatPlot2Dall[f] για το σχεδιασμό όλων των παραπάνω

Όλες αυτές οι προκαθορισμένες σειρές εντολών μπορούν να φορτωθούν τυπώνοντας:

```
<< notebooks/PatPlot.m
```

Η χρήση αυτών των notebooks (υπάρχουν αναλυτικά στο παράρτημα) απαιτεί τον ακριβή ορισμό μιας συνάρτησης καθορίζοντας το επίπεδο των γωνιών theta (θ) και phi (φ). Αυτή η συνάρτηση πρέπει να είναι θετική για τις διευθύνσεις theta και phi.

6.1.1 PatPlotxy

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια κεραία της οποίας η ακτινοβολία ορίζεται ως εξής:

U (theta , phi) = Cos^2(theta) * Sin^2(phi)

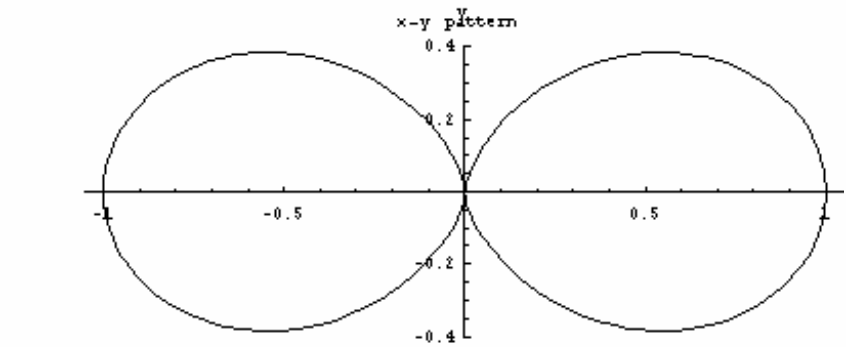
Για το διάγραμμα ακτινοβολίας αυτής της κεραίας στο επίπεδο x – y εργαζόμαστε ως εξής:

Είσοδος:

```
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[u];
u[theta_, phi_] := Cos[phi]^2 * Sin[theta]^2;
PatPlotxy[u]

$Failed
```

Εξοδος:




```
- Graphics -
```

Σημείωση:

Η εντολή ClearAll[u] «καθαρίζει» όλους τους προηγούμενους ορισμούς της συνάρτησης u. Αν και σε αυτή την εφαρμογή δεν ήταν απαραίτητο κάτι τέτοιο, μιας και δεν υπήρχε κανένας προγενέστερος ορισμός για τη συνάρτηση u, γενικά είναι πολύ χρήσιμο να «καθαρίζουμε» όλες τις συναρτήσεις, ώστε να μην επικαλυφθούν από προηγούμενους ορισμούς.

6.1.2 PatPlotxz

Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας της παραπάνω κεραίας στο επίπεδο x – z ενεργούμε ως εξής :

Είσοδος:

```
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[u];
u[theta_, phi_] := Cos[phi]^2 * Sin[theta]^2;
PatPlotxz[u]
```

Έξοδος:

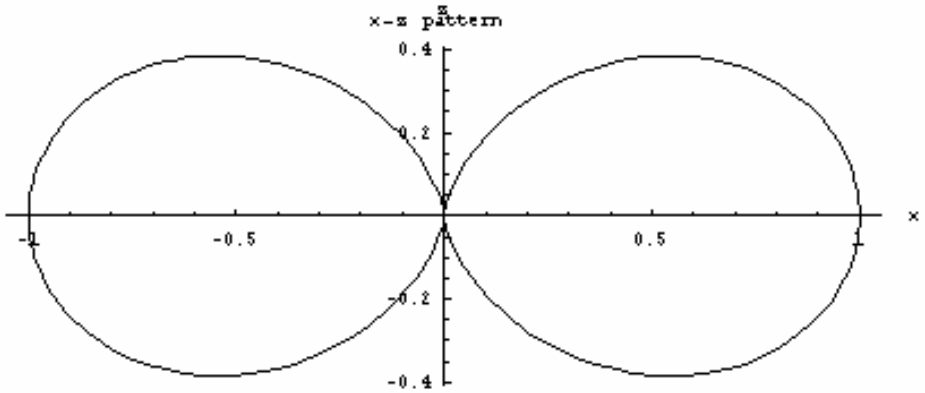
```
PatHer`

patHer[theta,phi,theta0,phi0]

PatHer`Private`

PatHer`Private`


$Failed
```




```
- Graphics -
```

6.1.3 PatPlotyz

Με παρόμοιο τρόπο θα σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας στο επίπεδο y – z .
Υποθέτουμε, για παράδειγμα, μια κεραία :

$$f(\text{theta}, \text{phi}) = \text{Sin}(5 * \text{theta})$$

Έτσι, έχουμε :

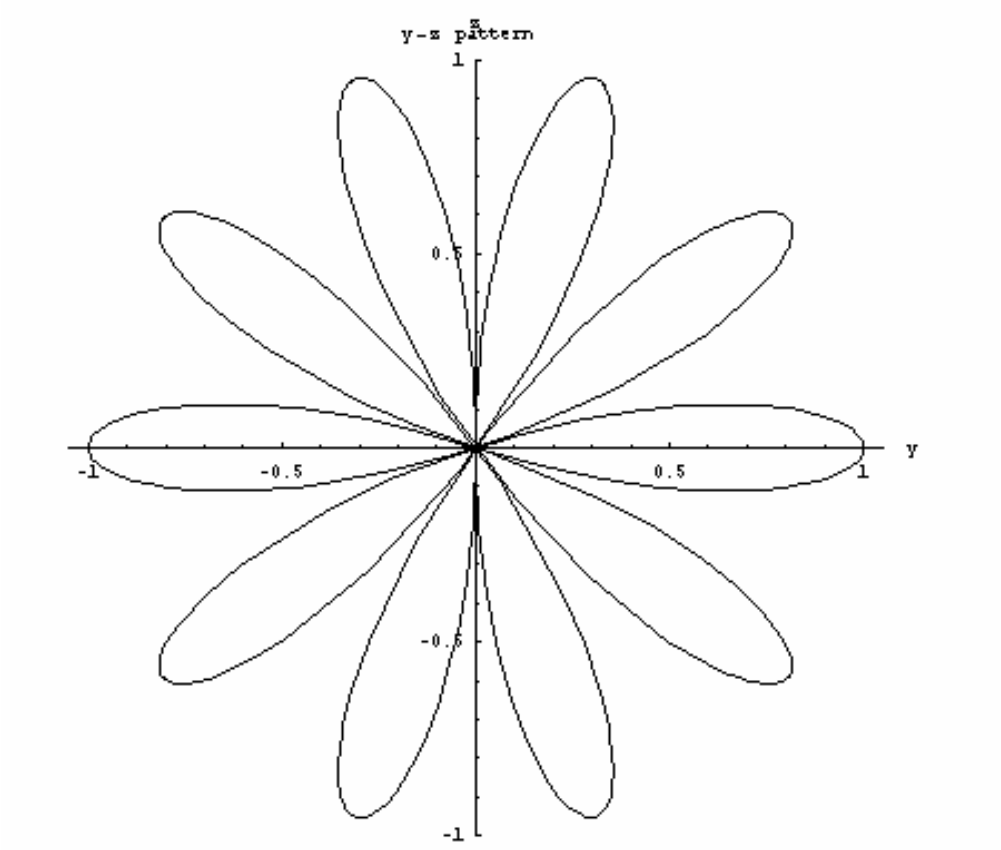
```
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[u];
u[theta_, phi_] := Sin[5 * theta];
PatPlotyz[u]

PatHer`

patHer[theta,phi,theta0,phi0]

PatHer`Private`

PatHer`Private`
```



- Graphics -

6.1.4 PatPlot2Dall

Χρησιμοποιώντας αυτήν μόνο την εντολή μπορούμε να σχεδιάσουμε τα δυσδιάστατα διαγράμματα ακτινοβολίας και των τριών επιπέδων. Για την κεραία με ακτινοβολία:

$$U(\theta, \phi) = \cos^2(\theta) * \sin(\phi)$$

ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

```
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[u];
u[theta_, phi_] := Cos[phi]^2 * Sin[theta]^2;
PatPlot2DAll[u]

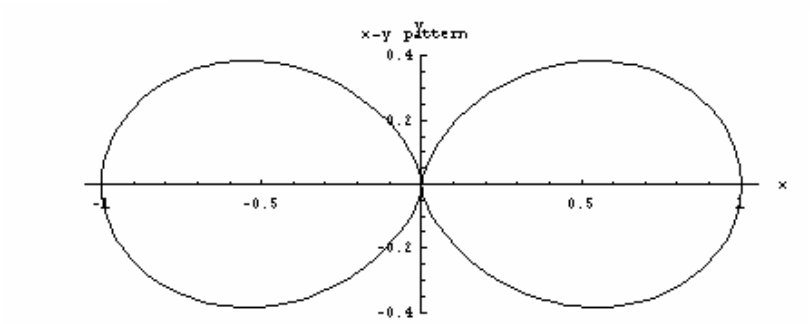
PatHer`

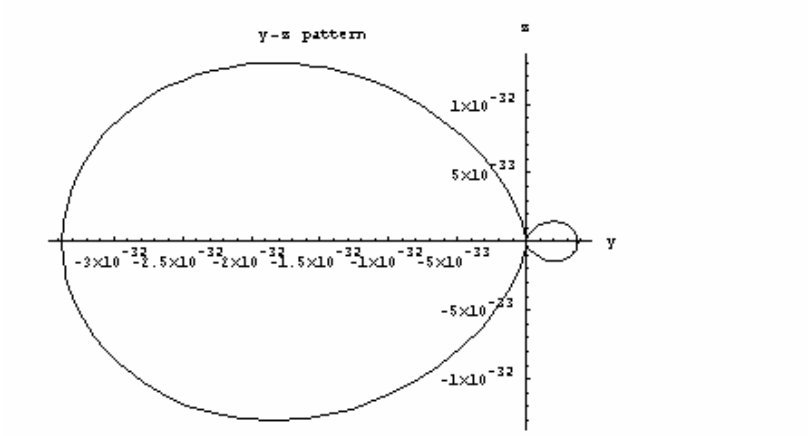
patHer[theta,phi,theta0,phi0]

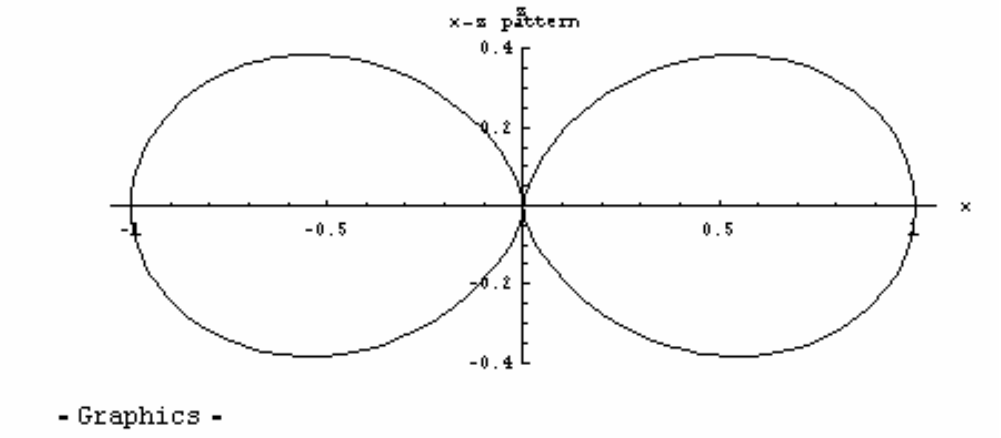
PatHer`Private`

PatHer`Private`
```

Αποτέλεσμα:







6.1.5 Επιλογή «PlotPoints»

Στα παραπάνω διαγράμματα, το Mathematica επέλεγε μόνο του τον αριθμό των σημείων που χρησιμοποίησε για τη χάραξη των καμπυλών. Σε ορισμένα, όμως πολύπλοκα διαγράμματα, όπως αναφέρεται και στην εισαγωγή, μπορεί κάποιες από τις λεπτομέρειες του διαγράμματος να χαθούν, εξαιτίας του χαμηλού αριθμού δειγμάτων. Με την εντολή, όμως, PlotPoints → (αριθμός σημείων) μπορούμε να ορίσουμε εμείς αυτόν τον αριθμό. Ένα παράδειγμα φαίνεται παρακάτω:

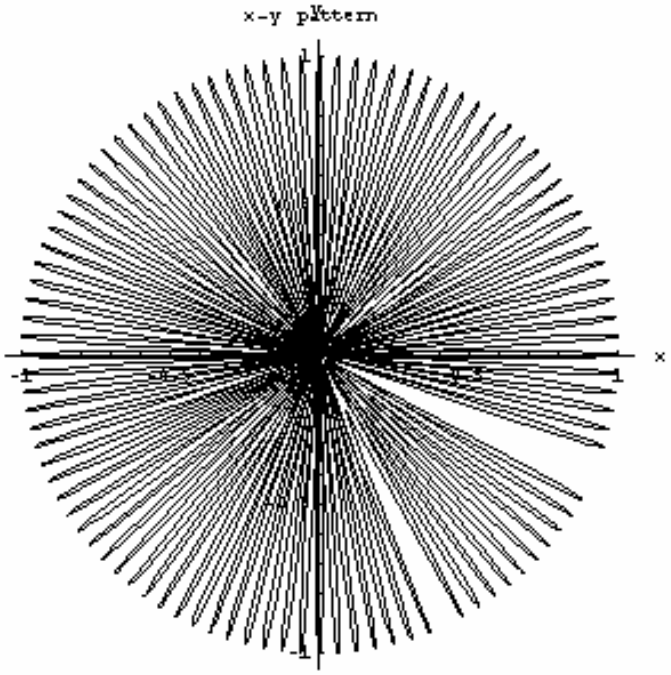
```
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[u];
u[theta_, phi_] := Sqrt[Cos[50 * phi]^2 * Sin[theta]]
PatPlotxy[u, PlotPoints → 100]

PatHer`

patHer[theta,phi,theta0,phi0]

PatHer`Private`

PatHer`Private`
```



- Graphics -

6.2 Τρισδιάστατα Διαγράμματα:

6.2.1 PatPlot 3D

Η εντολή PatPlot3D επιτρέπει το σχεδιασμό τρισδιάστατων (3D) διαγραμμάτων ακτινοβολίας.
Ας υποθέσουμε μια κεραία της οποίας η ακτινοβολία δίνεται από της εξής συνάρτηση:

$$U(\theta, \phi) = \cos^2(\theta) * \sin(\phi)$$

Το τρισδιάστατο διάγραμμα ακτινοβολίας της παραπάνω κεραίας θα σχεδιαστεί χρησιμοποιώντας τις εξής εντολές:

```
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[u];
u[theta_, phi_] := Cos[phi]^2 * Sin[theta]^2;
PatPlot3D[u]

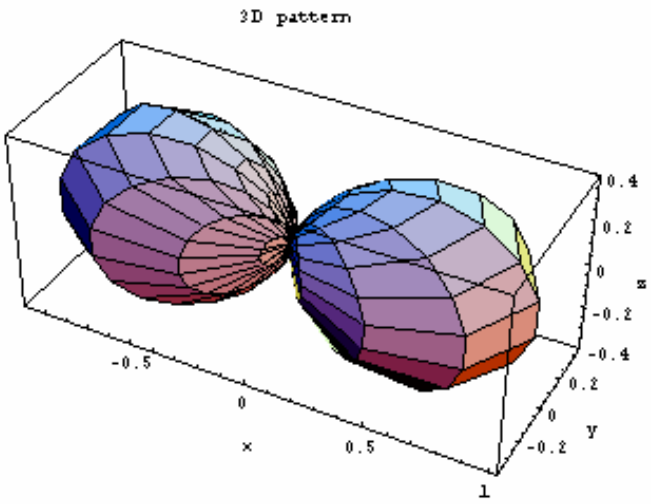
PatHer`

patHer[theta,phi,theta0,phi0]

PatHer`Private`

PatHer`Private`

$Failed
```




```
- Graphics3D -
```

Και σε αυτή την περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί η επιλογή PlotPoints. Για παράδειγμα, έχουμε μια κεραία με ακτινοβολία:

$$U(\theta, \phi) = \cos^2(6\phi) * \sin^2(\theta)$$

Για να δούμε αυτό το διάγραμμα ακτινοβολίας αυξάνουμε τον αριθμό των δειγμάτων και παρατηρούμε τη διαφορά :

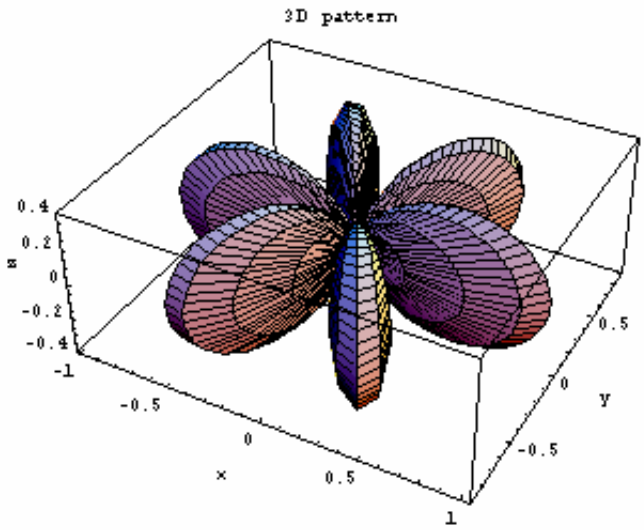
```
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[u];
u[theta_, phi_] := Cos[3 * phi]^2 * Sin[theta]^2;
PatPlot3D[u, PlotPoints → 60]

PatHer`

patHer[theta,phi,theta0,phi0]

PatHer`Private`

PatHer`Private`
```




```
- Graphics3D -
```

Χρησιμοποιώντας μόνο την εντολή PatPlotAll, μπορούμε να δούμε όλα τα διαγράμματα ακτινοβολίας, και τα δισδιάστατα σε όλα τα επίπεδα, και το τρισδιάστατο.
Θεωρούμε:

$$F(\text{theta}, \text{phi}) = \text{Sin}(\text{theta})$$

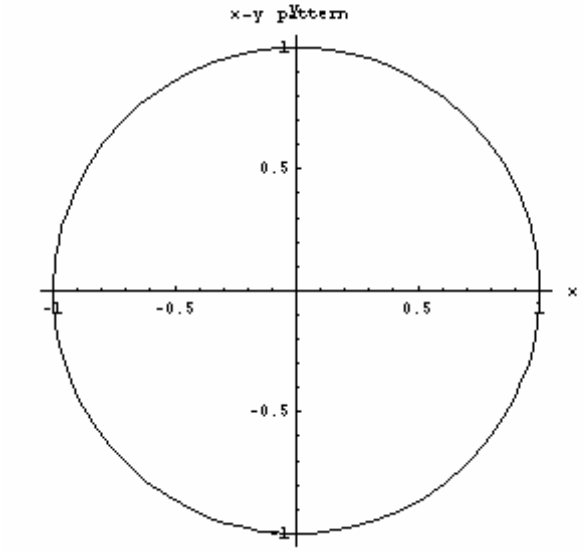
```
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[u];
u[theta_, phi_] := Sin[theta];
PatPlotAll[u, PlotPoints → 15]

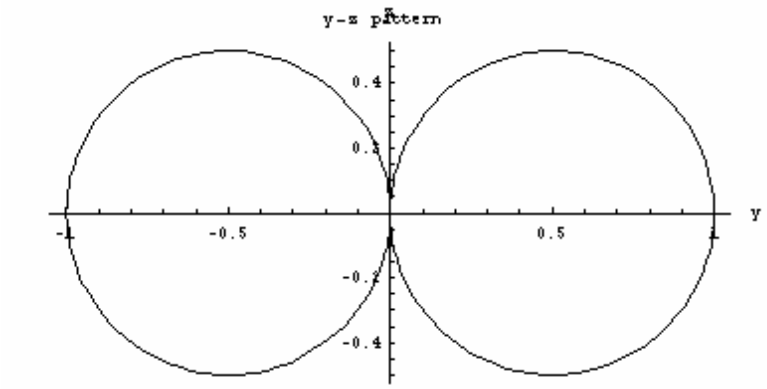
PatHer`

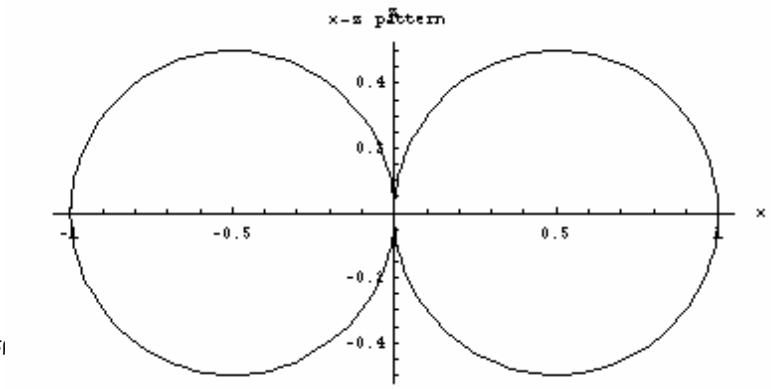
patHer[theta,phi,theta0,phi0]

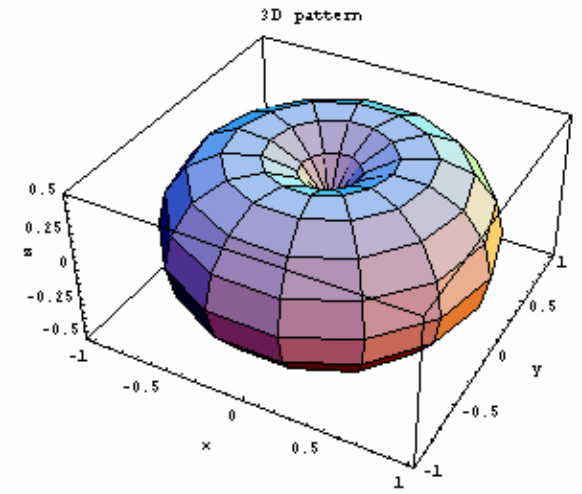
PatHer`Private`

PatHer`Private`
```









- Graphics3D -

6.3 Διαγράμματα Ακτινοβολίας Δίπολου Hertz:

Με το πακέτο PatHer.m μπορούμε να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα ακτινοβολίας ενός δίπολου Hertz, για όλες τις διευθύνσεις. Αυτό το πακέτο μπορεί να φορτωθεί με την εντολή <<notebooks/PatHer.m.

6.3.1 Δίπολο Hertz στη διεύθυνση z σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xyz

Με τη συνάρτηση PatHer [theta , phi] μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ενός απλού δίπολου Hertz. Θα πρέπει να φορτώσουμε το PatHer.m και το PatPlot.m, ως εξής:

Είσοδος:

```
<< notebooks/PatHer.m
<< notebooks/PatPlot.m
f[theta_, phi_] := PatHer[theta, phi];
PatPlot3D[f]
```

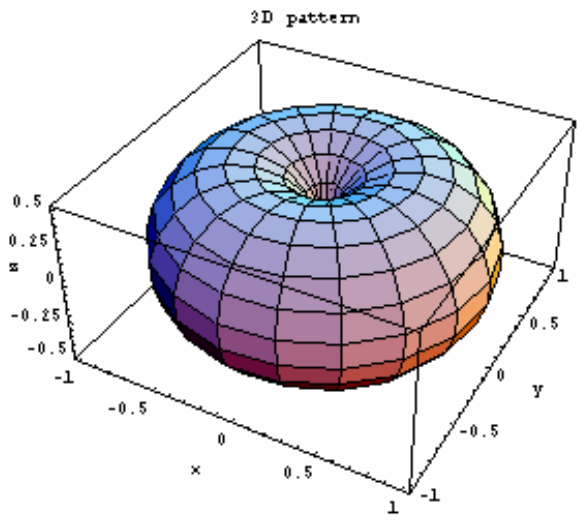
Έξοδος:

```
patHer[theta,phi,theta0,phi0]

Global`Private`

Global`Private`

EndPackage[]
```



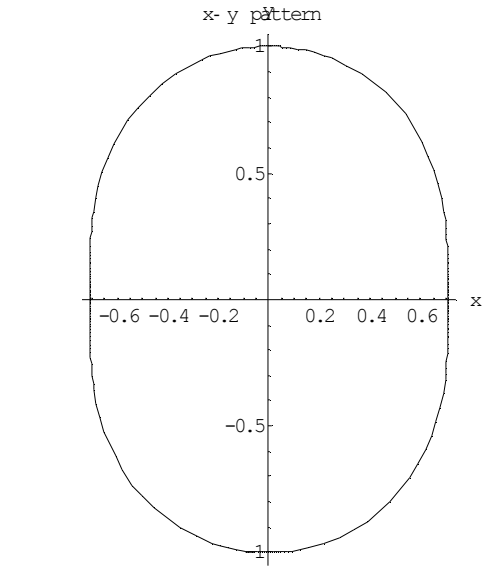

```
- Graphics3D -
```

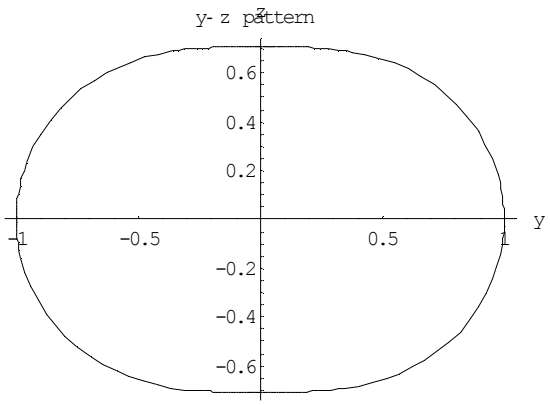
6.3.2 Ένα δίπολο Hertz σε οποιαδήποτε διεύθυνση σε σχέση με ‘ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xyz

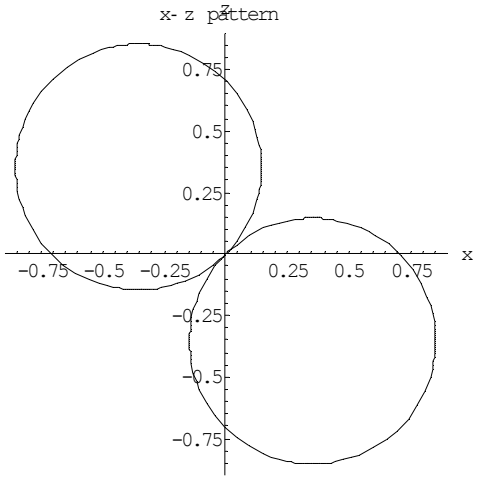
Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση PatHer[theta, phi, theta0, phi0], μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας ενός απλού διπόλου Hertz, του οποίου οι άξονες είναι στις διευθύνσεις:
theta = theta0 και
phi = phi0.

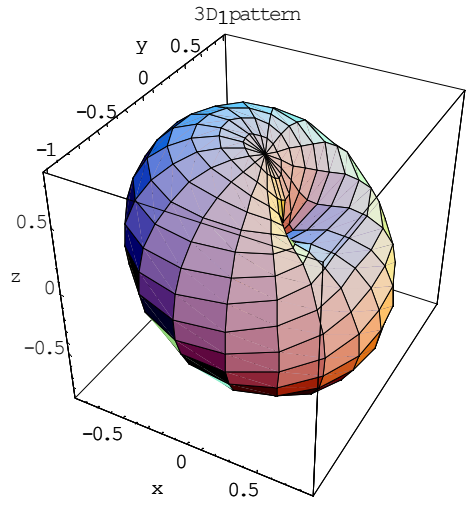
Όπως είναι φανερό, για ένα δίπολο στη διεύθυνση z, θα είναι theta0 = 0, ενώ η τιμή του phi0 μπορεί να είναι οποιαδήποτε.

Για παράδειγμα, για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας ενός διπόλου Hertz, με
theta0 = Pi/4 και
phi0 = 0,
εργαζόμαστε ως εξής:









...Graphics3D...

6.4 PatDip.m: Διαγράμματα ακτινοβολίας διπόλων (με ακαθόριστο μήκος)

Το πακέτο PatDip.m καθορίζει το διάγραμμα ακτινοβολίας ενός δίπολου ακαθόριστου μήκους. Φορτώνεται πληκτρολογώντας <<notebooks/PatDip.m. Για να σχεδιαστεί το διάγραμμα ακτινοβολίας φορτώνουμε το PatPlot.m με τον ίδιο τρόπο.

6.4.1 Δίπολο αυθαίρετου μήκους στην διεύθυνση z σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xyz

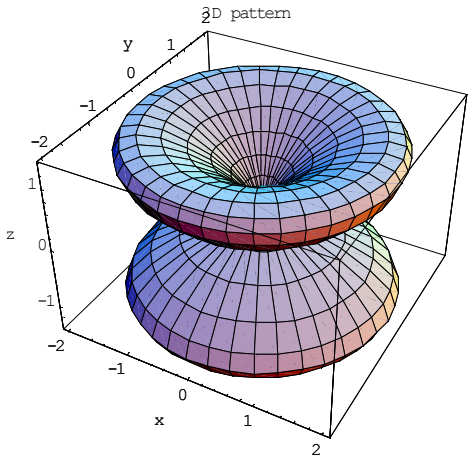
Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση PatDip[theta, phi] μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ενός δίπολου στη διεύθυνση z, στο οποίο μπορούμε να δίνουμε διάφορες τιμές στο μήκος και να βλέπουμε τη διαφορά.
Το διάγραμμα σχεδιάζεται ανάλογα με τα theta και phi, καθώς και το μήκος του δίπολου (length σε μέτρα) και το μήκος κύματος (lambda σε μέτρα).

(Πρέπει να σιγουρευτούμε ότι δίνουμε σωστές τιμές στις παραμέτρους αν θέλουμε να σχεδιαστεί σωστά το διάγραμμα ακτινοβολίας).

Για παράδειγμα, αν επιθυμούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας ενός δίπολου Hertz με:
- Μήκος length = 1 meter
- Συχνότητα f = 600 MHz

πρέπει να φορτώσουμε τα PatDip.m και PatPlot.m όπως φαίνεται παρακάτω:

Έτσι, έχουμε:



...Graphics3D...

6.4.2 Δίπολα αυθαίρετου μήκους σε οποιαδήποτε διεύθυνση σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύτημα συντεταγμένων xyz

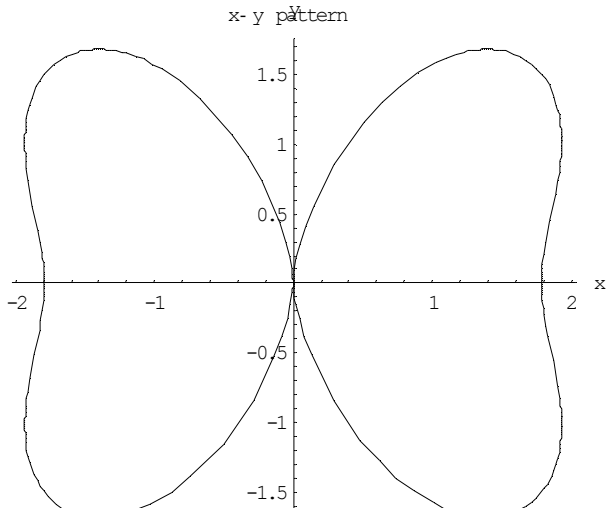
Η συνάρτηση PatDip [theta, phi, length, lambda, theta0, phi0], σχεδιάζει το διάγραμμα ακτινοβολίας ενός διπόλου με ακαθόριστο μήκος και του οποίου οι άξονες είναι στη διεύθυνση theta = theta0 και phi = phi0.
Όπως είναι φανερό, για ένα δίπολο στη διεύθυνση z, θα είναι theta0 = 0, ενώ η τιμή του phi0 μπορεί να ποικίλει.

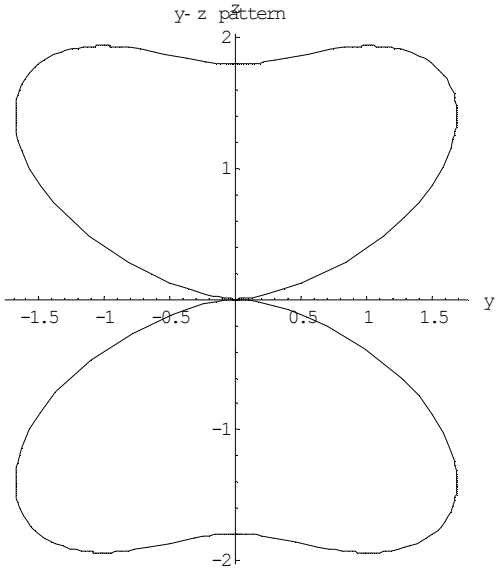
Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας ενός διπόλου με:
- Μήκος length = 1 meter
- Συχνότητα f = 1 MHz

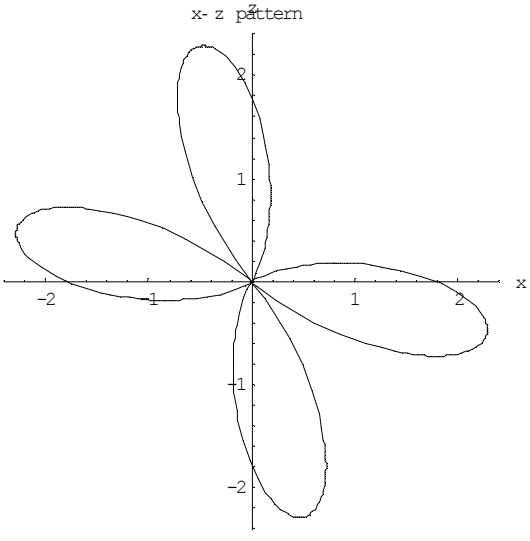
και υποθέτοντας:

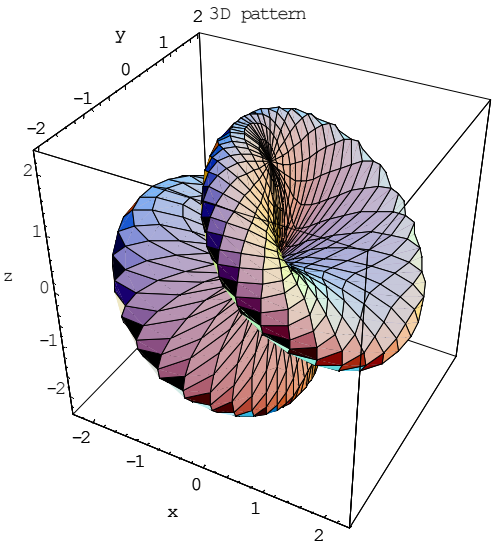
- theta0 = Pi/4
- phi0 = 0

εργαζόμαστε ως εξής:









...Graphics3D...

6.5 PatLin.m: Διάγραμμα ακτινοβολίας γραμμικής πηγής ακαθόριστου μήκους:

Με το πακέτο PatLin.m μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας μιας γραμμικής πηγής μεταβαλλόμενου μήκους.
Το πακέτο φορτώνεται πληκτρολογώντας <<notebooks/PatLin.m. Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας, αρκεί να φορτώσουμε και το PatPlot.m με τον ίδιο τρόπο.

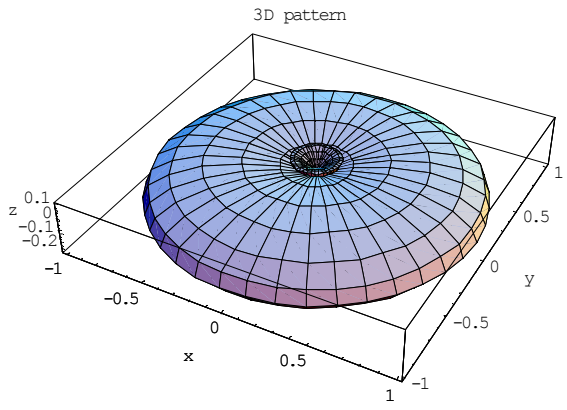
6.5.1 Γραμμική πηγή αυθαίρετου μήκους στη διεύθυνση z σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων xyz.

Η συνάρτηση PatLin[theta, phi] σχεδιάζει το διάγραμμα ακτινοβολίας μιας γραμμικής πηγής αυθαίρετου μήκους. Το διάγραμμα σχεδιάζεται ανάλογα με τα ορίσματα theta και phi, καθώς και με το μήκος της πηγής, (length σε μέτρα), το μήκος κύματος (lambda σε μέτρα) και την διαφορά φάσης για κάθε μονάδα μήκους (beta0 σε rad) κατά μήκους της γραμμικής πηγής.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας μιας γραμμικής πηγής:

- μήκους *length = 1 meter*,
- συχνότητας λειτουργίας *f = 600 MHz*,
- με διαφορά φάσης *beta0 = Pi/2*,

εργαζόμαστε ως εξής:

```
300000000
```




```
...Graphics3D...
```

6.5.2 Γραμμική πηγή αυθαίρετου μήκους σε οποιαδήποτε διεύθυνση σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημνα συντεταγμένων zyx.

Η συνάρτηση PatLin[theta,phi.length.lambda,theta0,phi0] καθορίζει το διάγραμμα ενός Line source ακαθόριστου μήκους του οποίου ο άξονας είναι στην διεύθυνση theta=theta0 και phi=phi0. Όπως είναι φανερό, για ένα Line source στην διέυθυνση z η τιμή του theta0 θα είμαι 0 ενώ η τιμή του phi0 δεν επηρεάζει.

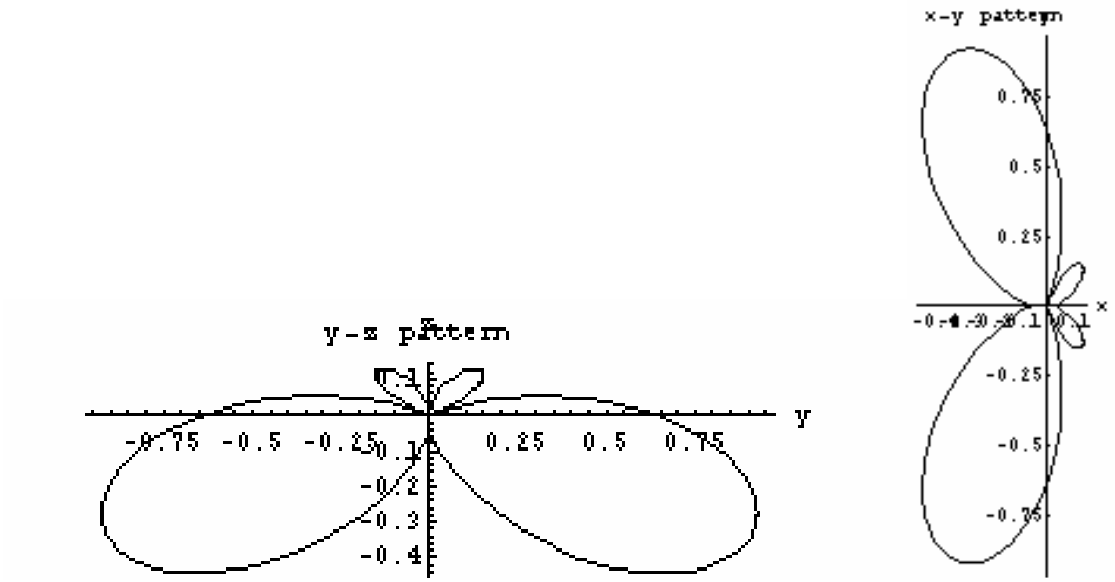
Για παράδειγμα, για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα μιας γραμμικής πηγής:

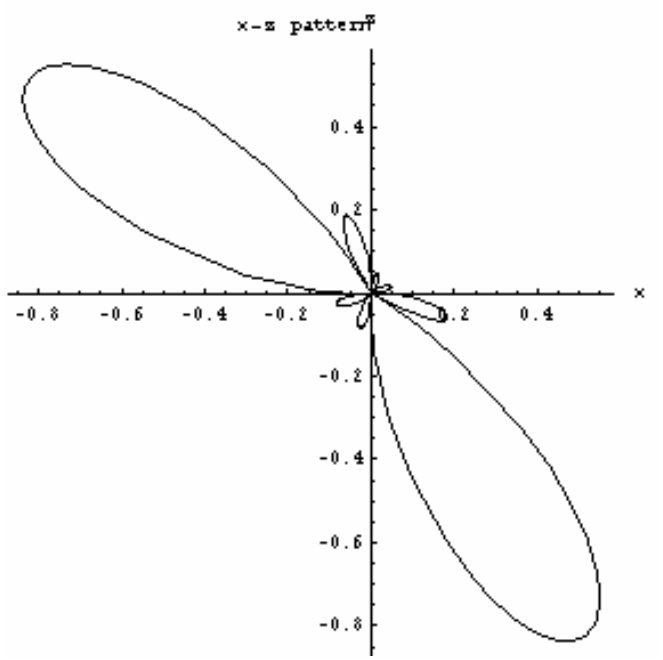
- μήκους *length = 1 meter*,
- συχνότητας λειτουργίας *f = 600 MHz*,
- με διαφορά φάσης *beta0 = Pi*

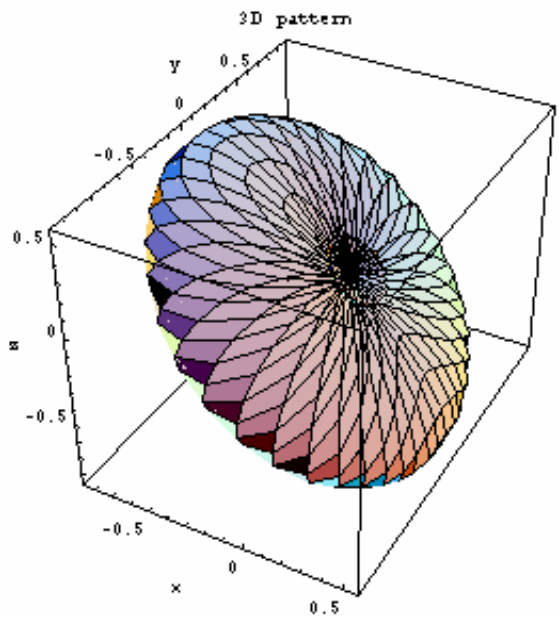
και υποθέτοντας ότι βρίσκεται στην διεύθυνση theta0=Pi/4 και phi0=0, πρέπει να φορτώσουμε τα notebooks PatLin.m και PatPlot.m, όπως φαίνεται παρακάτω:

```
<< notebooks/PatLin.m
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[f];
theta0 = Pi / 4;
phi0 = 0.;
l = 1.;
frequency = 600 10^6;
c = 3 10^8
lambda = c / frequency
beta0 = Pi;
f[theta_, phi_] :=
 Abs[PatLin[theta, phi, l, lambda, beta0, theta0, phi0]];
PatPlotAll[f, PlotPoints → 40]
```

Το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι:






3D pattern
y
0.5
0
-0.5
0.5
0
-0.5
z
-0.5
0
x
0.5

6.6 PatArr.m: Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία

Το πακέτο PatArr.m καθορίζει το διάγραμμα ακτινοβολίας μιας ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας αυθαίρετα ορισμένης. Το πακέτο φορτώνεται πληκτρολογώντας <<notebooks/PatArr.m. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας φορτώνοντας επίσης το PatPlot.m.

6.5.3 Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία στην διεύθυνση z σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

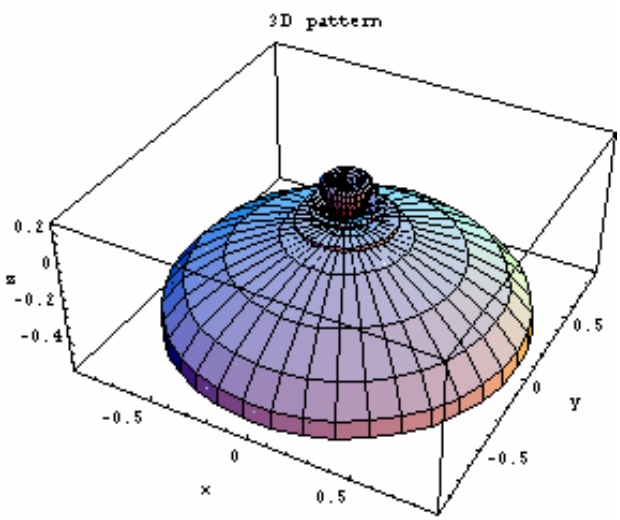
Η συνάρτηση PaLin[theta,phi,lengh,lambda,theta0,phi0] καθορίζει το διάγραμμα ακτινοβολίας μιας ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας στην διεύθυνση z. Το διάγραμμα καθορίζεται από τις γωνίες theta (θ) και phi (φ), καθώς και από καθώς και από τον αριθμό των στοιχείων (n), την απόσταση μεταξύ τους (d σε μέτρα), το μήκος κύματος (lambda, σε μέτρα) και την διαφορά φάσης από στοιχείο σε στοιχείο (alpha0 σε rad).

Για παράδειγμα για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα μιας ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας
- που αποτελείται από *5 στοιχεία*
- με απόσταση μεταξύ τους *0.25 m*,
- διαφορά φάσης *Pi/2* μεταξύ τους,
- σε συχνότητα λειτουργίας *f=600 MHz*

πρέπει να φορτώσουμε τα notebooks PatArr και PatPlot όπως φαίνεται παρακάτω:

```
<< notebooks/PatArr.m
<< notebooks/PatPlot.m
ClearAll[f];
n = 5;
d = 0.25;
frequency = 600 10^6;
c = 3 10^8;
lambda = c / frequency;
alpha0 = Pi / 2;
f[theta_, phi_] :=
 Abs[PatArr[theta, phi, n, d, lambda, alpha0]];
PatPlot3D[f, PlotPoints → 40]
```

Έτσι, έχουμε το εξής διάγραμμα:


3D pattern
0.2
0
z
-0.2
-0.4
-0.5
0
x
0.5
0.5
0
y
-0.5

Παράρτημα Α

```
BeginPackage["PatArr`"]

PatArr::usage="PatArr[theta,phi,n,d,lambda,alpha,theta0,ph
i0]"

Begin["`Private`"]

ClearAll[Sinc]
ClearAll[UEArray]
ClearAll[PatArr]

Sinc[x_ /; Abs[x]>0.000001 ]:= Sin[x]/x ;
Sinc[x_ /; Abs[x]<=0.000001 ]:= 1. ;

UEArray[n_,psi_ /; Abs[Sin[psi/2]]>0.000001]:=
                    Sinc[n psi/2] /  Sinc[psi/2];
UEArray[n_,psi_ /; Abs[Sin[psi/2]]<=0.000001]:=1;

PatArr[theta_,phi_,n_,d_,lambda_,alpha_,theta0_,phi0_]:=
   Module[{dir,obsdir,the},
     dir={Sin[theta0]*Cos[phi0],Sin[theta0]*Sin[phi0],
          Cos[theta0]};
     obsdir={Sin[theta]*Cos[phi],Sin[theta]*Sin[phi],
             Cos[theta]};
     the= ArcCos [obsdir . dir];
     PatArr[the,0.,n,d,lambda,alpha]
         ]

PatArr[theta_,phi_,n_,d_,lambda_,alpha_]:=
   Module[{beta,psi},
     beta = (2 Pi) / lambda;
     psi  = beta d Cos[theta] + alpha;
     pattern = UEArray[n,psi]
         ]

End[ ]

EndPackage[ ]
```

Παράρτημα Β

```
BeginPackage["PatDip`"]
PatDip::usage="PatDip[theta,phi,l,lambda,theta0,phi0]"
          Begin["`Private`"]

ClearAll[Fdip]
ClearAll[PatDip]

Fdip[u_,theta_/; Abs[Sin[theta]]>0.00001]:=(Cos[u
Cos[theta]]-Cos[u])/
    Sin[theta];
Fdip[u_,theta_/; Abs[Sin[theta]]<=0.00001]:=0;
PatDip[theta_,phi_,l_,lambda_,theta0_,phi0_]:=
  Module[{dir,obsdir,the},

dir={Sin[theta0]*Cos[phi0],Sin[theta0]*Sin[phi0],Cos[theta
0]};

     obsdir={Sin[theta]*Cos[phi],Sin[theta]*Sin[phi],Cos[t
heta]};
          the=ArcCos[obsdir.dir];
          PatDip[the,0,l,lambda]]
PatDip[theta_,phi_,l_,lambda_]:=Module[{beta,u},Beta=(2
Pi)/lambda;
          u=beta l/2;
          Pattern=Fdip[u,theta]]
End[]
EndPackage[]
```

Παράρτημα Γ

```
BeginPackage["PatHer`"]
PatHer::usage="PatHer[theta,phi,theta0,phi0]"
          Begin["`Private`"]
ClearAll[PatHer]
PatHer[theta_,phi_,theta0_,phi0_]:=
  Module[{dir,obsdir,the},

dir={Sin[theta0]*Cos[phi0],Sin[theta0]*Sin[phi0],Cos[theta
0]};

     obsdir={Sin[theta]*Cos[phi],Sin[theta]*Sin[phi],Cos[t
heta]};
          the=ArcCos [obsdir.dir];
          Sin[the]]

          PatHer[theta_,phi_]:=
               Module[{},Sin[theta]]
End[]
EndPackage[]
```

Παράρτημα Δ

```
ClearAll[PatPlotxy]
PatPlotxy[f_,opts___]:=
              ParametricPlot[{f[Pi/2,phi]*Cos[phi],
              f[Pi/2,phi]*Sin[phi]},{phi,0,2 Pi},
              opts,
              PlotRange -> All,
              PlotLabel -> "x-y pattern",
              AspectRatio -> Automatic,
              AxesLabel -> {"x","y"}]
ClearAll[PatPlotyz]
PatPlotyz[f_,opts___]:=(ClearAll[fyz];
               Pv=Pi//N;
               fyz[t_ /; t <  Pv/2]:=f[Pv/2-t,Pv/2];
               fyz[t_ /; t >3 Pv/2]:=f[5 Pv/2-t,Pv/2];
               fyz[t_ /; t >= Pv/2]:=f[t-Pv/2, 3 Pv/2];
               ParametricPlot[{fyz[t]*Cos[t],
                   fyz[t]*Sin[t]},{t,0,2 Pi},
                   opts,
                   PlotRange -> All,
                   PlotLabel -> "y-z pattern",
                   AspectRatio -> Automatic,
                   AxesLabel -> {"y","z"} ])
ClearAll[PatPlotxz]
PatPlotxz[f_,opts___]:=(ClearAll[fxz];
               Pv=Pi//N;
               fxz[t_ /; t <  Pv/2]:=f[Pv/2-t,0];
               fxz[t_ /; t >3 Pv/2]:=f[5 Pv/2-t,0];
               fxz[t_ /; t >= Pv/2]:=f[t-Pv/2, Pv];
               ParametricPlot[{fxz[t]*Cos[t],
                 fxz[t]*Sin[t]},{t,0,2 Pi},
                 opts,
                 PlotRange -> All,
                 PlotLabel -> "x-z pattern",
                 AspectRatio -> Automatic,
                 AxesLabel -> {"x","z"}])
ClearAll[PatPlot3D]
PatPlot3D[f_,opts___]:=ParametricPlot3D[
          {f[theta,phi]*Sin[theta]*Cos[phi],
           f[theta,phi]*Sin[theta]*Sin[phi],
           f[theta,phi]*Cos[theta]},
           {theta,0.,Pi}, {phi,0.,2 Pi},
            opts,
            PlotRange -> All,
            PlotLabel -> "3D pattern",
            AspectRatio -> Automatic,
            AxesLabel -> {"x","y","z"}]
```

```
ClearAll[PatPlot2DAll]
PatPlot2DAll[f_,opts___]:=(PatPlotxy[f,opts];
                           PatPlotyz[f,opts];
                           PatPlotxz[f,opts])
ClearAll[PatPlotAll]
PatPlotAll[f_,opts___]:=(PatPlotxy[f,opts];
                         PatPlotyz[f,opts];
                         PatPlotxz[f,opts];
                         PatPlot3D[f,opts])
```

Παράρτημα Ε

```
(*
Optimization of Arrays that lie in the 2-D plane:
*)
Off[General::"spell1"];
(*
Let the array geometry be defined as:
*)
(*
geom={{x1,y1,0},{x2,y2,0},...,{xn,yn,0}}
*)
(*
Maximum Directivity for unconstrained Q:
*)
maxDarray[geomin_,theta0_,phi0_,prec_]:=
     Module[{geom,array,Ioptimal,roe,alpha,psi0,b,B={},inv
B,Sinc,Num,braV,Vket,
      braV1,f,V1ket,braJ,Jket,md},
     geom=SetPrecision[geomin,prec];
          Num=Length[geom];

          (* Define preliminary functions *)
          Sinc[x_]=If[x>.0001,Sin[x]/x,1];
          roe[n_,m_]:=
      Sqrt[(geom[[n,1]]-geom[[m,1]])^2+(geom[[n,2]]-
geom[[m,2]])^2+(
              geom[[n,3]]-geom[[m,3]])^2];
          alpha[n_,m_]:=
      ArcTan[Abs[geom[[n,1]]-geom[[m,1]]],Abs[geom[[n,2]]-
geom[[m,2]]]];
          psin[n_,theta_,phi_]:=

2Pi(geom[[n,1]]Sin[theta]Cos[phi]+geom[[n,2]]Sin[theta]Sin
[phi]+
            geom[[n,3]]Cos[theta]);
          psin0[n_]:=psin[n,theta0,phi0];
          psi0[n_,m_]:=2 Pi roe[n,m]Sin[theta0]Cos[phi0-
alpha[n,m]];

          (* Build B matrix for the isotropic elements *)
          b[n_,m_]=
               If[ntheta0,phi->phi0};
          Vket=Partition[braV,1];
          V1ket=Vket/.{theta->theta0,phi->phi0};
          *)

          (* Build braV and Vket for planar case *)
          braV1=Table[1,{n,1,Num}];
```

```
          V1ket= Partition[braV1,1];

          (* Solve for J optimal *);
          invB=Inverse[B];
          Jket=LinearSolve[Conjugate[B],V1ket];
          Ioptimal = Jket;
          Do[Ioptimal[[k]]=Chop[Ioptimal[[k]] Exp[-I
psin0[k]]],{k,1,Num}];
          Print["Current values for optimal Directivity
with unconstrained Q:\n",
      TableForm[N[Ioptimal,prec]]];
          mag=ListPlot[Flatten[Abs[Ioptimal]],PlotJoined-
>True,
        PlotLabel->{"Magnitude"},PlotStyle-
>{RGBColor[1,0,0]},
        DisplayFunction->Identity];
          arg=ListPlot[Flatten[Arg[Ioptimal]],PlotLabel-
>{"Phase"},PlotJoined->True,
        PlotStyle->{RGBColor[0,0,1]},DisplayFunction-
>Identity];
          Show[GraphicsArray[{Show[mag],Show[arg]}],
      DisplayFunction->$DisplayFunction];

          (* Find the maximum directivity *);
          Dir= Chop[braV1.invB.Conjugate[V1ket]][[1]];
          Print["Directivity is: ",Dir];


          (* Find the Quality factor *)

     Q=Chop[(braV1.invB.invB.Conjugate[V1ket])/(braV1.invB
.Conjugate[V1ket])][[
          1]];
          Print["Quality Factor is: ",Q];

          (* integrate the original geom and the new Jket
*)

                    array=geom;

     Do[array[[k]]={geom[[k]],Abs[Ioptimal[[k,1]]],Arg[Iop
timal[[k,1]]]},{k,1,
        Num}];
          array
               ]
(*
Maximum Directivity for given constant Q:
*)
maxDarrayForQ[geomin_,theta0_,phi0_,Q_,prec_]:=
     Module[{geom,bestD,F,invF,p,psol,K,NumP,array,Ioptima
l,roe,alpha,psi0,b,B={},
```

```
W={},IdentN={},invB,Sinc,Num,braV={},Vket={},braJ,Jket,QBI
,invQBI,md,n,
      k,x},

          geom=SetPrecision[geomin,prec];
          Num=Length[geom];

          (* Define preliminary functions *)
          Sinc[x_]=If[x>.0001,Sin[x]/x,1];
          roe[n_,m_]:=
      Sqrt[(geom[[n,1]]-geom[[m,1]])^2+(geom[[n,2]]-
geom[[m,2]])^2+(
              geom[[n,3]]-geom[[m,3]])^2];
          alpha[n_,m_]:=
      ArcTan[Abs[geom[[n,1]]-geom[[m,1]]],Abs[geom[[n,2]]-
geom[[m,2]]]];
          psin[n_,theta_,phi_]:=

2Pi(geom[[n,1]]Sin[theta]Cos[phi]+geom[[n,2]]Sin[theta]Sin
[phi]+
            geom[[n,3]]Cos[theta]);
          psin0[n_]:=psin[n,theta0,phi0];
          psi0[n_,m_]:=2 Pi roe[n,m]Sin[theta0]Cos[phi0-
alpha[n,m]];

          (* Build B matrix for the isotropic elements *)
          b[n_,m_]=
               If[n
```

Παράρτημα ΣΤ

```
Clear[AF,AF3D,AF3Ddemo]
AF3D::usage =
  "AF3D[theta,phi,array] where array is in the \
form:{{{x1,y1,z1},amplitude1,phase1},
...,{{xn,yn,zn},amplituden,phasen}} and \
represents an array of point sources in 3-D space.
{x1,y2,yz} to {xn,yn,zn} \
are the locations of each source in terms of wavelengths.
amplitude1 to amplituden are the amplitudes in an
arbitrary linear unit of power or current supplied to
element n. phase1 to phasen are in radians. This function
returns the array factor function with theta and phi as
the independent variables.";
AF3Ddemo::usage =
  "AF3Ddemo[array] prints AF3D[theta,phi,array] and
generates a 3D plot of \
the array factor and the array of point source elements.";
AF::usage =
  "AF[array,theta,phi] where array is in the
form:{{z1,amplitude1,phase1}, \
... ,{zn,amplituden,phasen}} and represents a linear array
of point sources.  \
z1 to zn are the locations of each source along a line in
terms of \
wavelengths.  amplitude1 to amplituden are the amplitudes
in an arbitrary \
linear unit of power or current suplied to element n.
phase1 to phasen are \
in radians.  This function returns the array factor
function with theta and \
phi as the independent variables.";
AFdemo::usage =
  "AFdemo[array] prints AF[theta,phi,array] and generates
a 2D cartesian plot \
and then a 2D polar plot of the array factor and the array
of point source \
elements. ";
ThreeAxes::usage =
  "ThreeAxes[a,b] makes a standard cartesian axis graphics
object with x, y, \
and z running from -a to a, and with axis labels b units
beyond the tips of \
the axes.  ThreeAxes[a] is ThreeAxes[a,a/8].";

Blue=RGBColor[0,0,1];
ThreeAxes[u_,v_] :=
       Graphics3D[{{Blue,Line[{{-u,0,0},{u,0,0}}]},
```

```
                    Text["x",{u + v,0,0}],
              {Blue,Line[{{0,-u,0},{0,u,0}}]},
                    Text["y",{0, u + v,0}],
              {Blue,Line[{{0,0,0},{0,0,u}}]},
                    Text["z",{0,0,u + v}]}];

ThreeAxes[u_] := ThreeAxes[u,u/8];

f[theta_,dist_,phase_] =    Cos[theta]*(2Pi*dist) + phase;
AF[theta_,array_List]:=
   Abs[Sum[array[[i,2]]*(
     Cos[f[theta,
           array[[i,1]],
           array[[i,3]]]
        ]+
     I*Sin[f[theta,
           array[[i,1]],
           array[[i,3]]]]
                       ),
       {i,1,Length[array]}]];

AFdemo[array_List,opts___] :=
Module[{af,array2D,factor2D,factor2Dpolar},
  af[theta_]=AF[theta,array];
  Print["The Array Factor Function:  "];
  Print[af[theta]];
  array2D =
    Graphics[{RGBColor[0,0,1],PointSize[.06],
      Table[Point[{array[[i,1]],0}],{i,2,Length[array]}]},
      DisplayFunction->Identity];
  factor2D =
    Plot[af[theta],{theta,0,Pi},opts,PlotRange->All,
      DisplayFunction->Identity];
  factor2Dpolar =
       ParametricPlot[{Cos[theta]af[theta],
                    Sin[theta]af[theta]},
      {theta,0,2 Pi},opts,
      DisplayFunction->Identity];
  Show[array2D,PlotLabel->"The Array",Axes->True,
       DisplayFunction->$DisplayFunction];
  Show[factor2D,Axes->True,PlotLabel->"Array Factor:
Cartesian",
       DisplayFunction->$DisplayFunction];
  Show[factor2Dpolar,Axes->True,PlotLabel->"Array Factor:
Polar",
       DisplayFunction->$DisplayFunction];
];

Bx = (2Pi)Cos[phi]Sin[theta];
By = (2Pi)Sin[phi]Sin[theta];
Bz = (2Pi)Cos[theta];
```

```
AF3D[theta_,phi_,array_List]:=
  Abs[Sum[array[[i,2]]*(
        Cos[Bx array[[i,1,1]] +
            By array[[i,1,2]] +
            Bz array[[i,1,3]] +
             array[[i,3]]]
         +I*
        Sin[Bx array[[i,1,1]] +
            By array[[i,1,2]] +
            Bz array[[i,1,3]] +
             array[[i,3]]]
        ),{i,1,Length[array]}]
    ];

AF3Ddemo[array_List,opts___]:=
  Module[{af,factorPlot,arrayPlot,axeslength2=0},
 Do[axeslength2 = axeslength2 +
array[[i,2]],{i,1,Length[array]}];
       af[theta_,phi_]=AF3D[theta,phi,array];
 Print["The Array Factor Function: "];
 Print[af[theta,phi]];
 factorPlot=
     ParametricPlot3D[{Cos[phi] Sin[theta] af[theta,phi],
                       Sin[phi] Sin[theta] af[theta,phi],
                       Cos[theta] af[theta,phi]},
     {theta,0,Pi},{phi,0,2 Pi},opts,DisplayFunction-
>Identity];
  ShowArray[array];
  Show[factorPlot,ThreeAxes[axeslength2],
         PlotLabel->"The Array Factor Pattern",
     PlotRange->All,DisplayFunction->$DisplayFunction];
];

ShowArray[array_]:=
Module[{arrayPlot,axeslength=0},
  Do[If[axeslength <
Abs[array[[i,1,j]]],axeslength=array[[i,1,j]]]
    ,{i,1,Length[array]},{j,1,3}];
  arrayPlot=
Graphics3D[{RGBColor[0,0,1],PointSize[.045],
     Table[Point[array[[i,1]]],{i,1,Length[array]}]},Axes-
>True,
     DisplayFunction->Identity];
   Show[arrayPlot,ThreeAxes[axeslength],PlotLabel->"The
Array",
     PlotRange->All,DisplayFunction->$DisplayFunction];
];
CophasalArray[geom_,theta0_,phi0_]:=
Module[{psin,psin0,array},
   psin[n_,theta_,phi_]:=
```

```
      2Pi(geom[[n,1]]Sin[theta]Cos[phi]+
        geom[[n,2]]Sin[theta]Sin[phi]+
        geom[[n,3]]Cos[theta]);
   psin0[n_]:=psin[n,theta0,phi0];
   array=geom;
   Do[array[[k]]={geom[[k]],1,-
psin0[k]},{k,1,Length[geom]}];
   Return[array];
];
```

Βιβλιογραφία

[1] Electromagnetic Waves & Antennas, S. J. Orfanidis, 2004

[2] Mathematica ® Assisted Web-Based Antenna Education, Stephen E. Fisher and Eric Michielssen.

[3] Mathematica 3.0 by Wolfram Research.